

Riesz, Frigyes

Les systèmes d'équations
linéaires à infinité d'inconues.

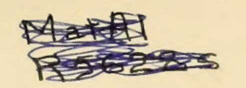
LES SYSTÈMES

D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

A UNE INFINITÉ D'INCONNUES.

A LA MÊME LIBRAIRIE.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS,
Publiée sous la direction de M. Émile BOREL,
Professeur de Théorie des Fonctions a l'Université de Paris.



COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS,
PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LES SYSTÈMES
D'ÉQUATIONS LINÉAIRES
A UNE INFINITÉ D'INCONNUES

PAR

FRÉDÉRIC RIESZ,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ ROYALE HONGROISE DE KOLOZSVÁR.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

PRÉFACE.

Je voudrais donner dans ce Volume un exposé rapide des idées fondamentales, des méthodes et des principaux résultats d'une théorie qu'on doit presque exclusivement à des géomètres contemporains. Personnellement, je n'ai contribué que bien peu à cette théorie, et si j'ai entrepris ce travail, c'est que j'y fus encouragé par mes recherches concernant quelques sujets voisins, parmi lesquels les systèmes orthogonaux de fonctions, les équations intégrales et les opérations fonctionnelles. Continuées par plusieurs auteurs, ces recherches se sont montrées plus ou moins fécondes pour les applications de la théorie actuelle et, d'autre part, elles m'ont permis de présenter quelques parties de cette théorie sous des aspects nouveaux. C'est ainsi, par exemple, que je pouvais rattacher l'étude du spectre des formes quadratiques à une infinité de variables à celle des opérations fonctionnelles linéaires.

Notre sujet n'appartient pas à la *Théorie des fonctions* proprement dite. Il devra plutôt être considéré comme marquant une première étape dans la *Théorie des fonctions d'une infinité de variables*, encore naissante, mais qui fournira peut-être bientôt les méthodes les plus puissantes de toute l'Analyse. En tout cas, je pense que le sujet et la disposition du présent Volume sont en bon accord avec le

plan général de cette Collection, où M. Borel m'a aimablement offert de le comprendre.

Enfin, j'ai à remercier M. Fréchet et M. Marcel Riesz des conseils précieux qu'ils m'ont donnésau cours de la correction des épreuves.

Kolozsvár, le 12 juin 1913.

FRÉDÉRIC RIESZ.

LES SYSTÈMES

D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

A UNE INFINITÉ D'INCONNUES.

CHAPITRE I.

LES COMMENCEMENTS DE LA THÉORIE.

MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS.

1. La théorie des équations à une infinité d'inconnues ne date pas de loin. En effet, une telle théorie existait à peine avant 1886, l'année où Poincaré démontrait la légitimité de la méthode des déterminants d'ordre infini. D'ailleurs, l'attention générale n'y fut attirée, en réalité, que par deux Mémoires de M. Hilbert, parus en 1906 et faisant partie d'une série de Mémoires sur l'équation de Fredholm; dès lors, la théorie se dégageait rapidement et l'importance et l'inattendu des résultats acquis fit presque oublier tout ce que l'on en possédait déjà auparavant.

Cependant, les théories ont leurs commencements : des allusions vagues, des essais inachevés, des problèmes particuliers; et même lorsque ces commencements importent peu dans l'état actuel de la Science, on aurait tort de les passer sous silence.

2. L'étude des systèmes d'équations à une infinité d'inconnues fut suscitée par la *méthode des coefficients indéterminés*. Cette méthode, appliquée depuis le XVII[e] siècle à l'intégration des équations différentielles par des séries et à d'autres problèmes, consiste en principe à remplacer la fonction cherchée par une série à coefficients inconnus. Alors *les données du problème permettront d'établir entre ces coefficients inconnus, en nombre infini, une infinité de relations; voilà le système d'équations à une infinité d'inconnues.*

Cependant, pour la plupart des problèmes ainsi traités, l'infinité du nombre des inconnues ne comportait aucune difficulté et, à ce qu'il semble, on ne se rendait même pas compte qu'il s'agissait de quelque idée nouvelle. C'est qu'on ne tombait que sur des systèmes *récurrents*, où chacune des équations en elle-même ne contenait qu'un nombre fini d'inconnues et *l'on n'avait à résoudre que des systèmes finis, bien qu'une infinité de fois.*

FOURIER ET LE PRINCIPE DES RÉDUITES.

3. En étudiant un cas particulier de ce qu'on appelle aujourd'hui *problème de Dirichlet*, Fourier tombait, dans sa *Théorie analytique de la chaleur*, à un système qui n'était plus récurrent. Il se proposait de déterminer une solution $v(x, y)$ de l'équation à dérivées partielles

$$(1) \qquad v''_{x^2} + v''_{y^2} = 0,$$

valable dans le domaine

$$x > 0, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$$

se réduisant à 1 pour $x = 0$, s'annulant pour $y = \pm\frac{\pi}{2}$ et pour $x = \infty$ [1]. Voilà comment il opère. Tout d'abord, il pose

$$v(x, y) = F(x) f(y)$$

et cherche à satisfaire à l'équation (1) sans se soucier des données sur la frontière. Il trouve ainsi la solution particulière

$$(2) \qquad v(x, y) = e^{-mx} \cos my,$$

où m désigne un nombre réel quelconque. En choisissant m positif, entier et impair, la solution (2) remplit les conditions-limite, sauf la première. Or, Fourier pose

$$v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-(2m-1)x} \cos(2m-1)y;$$

et il ne reste qu'à déterminer les coefficients a_m de façon que, pour $x = 0$, la somme $v(x, y)$ de la série se réduise à 1. Cela

---

[1] Art. 166 et suiv.

revient, dit-il, à ce que

$$(3) \qquad 1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(2m-1)y.$$

Pour chasser encore la variable y, il différentie l'équation terme à terme une infinité de fois et pose $y = 0$; ce qui fournit

$$(4) \qquad \begin{cases} 1 = \sum a_m, \\ 0 = \sum (2m-1)^2 a_m, \\ 0 = \sum (2m-1)^4 a_m, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

système d'une infinité d'équations linéaires aux inconnues a_m, *en nombre infini.*

4. Pour le résoudre, Fourier prend les k premières équations, n'y conserve que les k premières inconnues et néglige tous les termes qui dépendent des autres inconnues. En désignant les inconnues de ce système réduit par

$$a_1^k, \quad a_2^k, \quad \dots, \quad a_k^k,$$

on obtient, par un calcul facile à exécuter,

$$a_1^k = \frac{9 \cdot 25 \dots (2k-1)^2}{8 \cdot 24 \dots (4k^2-4k)},$$

ce qui donne, en vertu d'une formule bien connue de Wallis,

$$\lim_{k=\infty} a_1^k = \frac{4}{\pi}.$$

De plus, le système réduit donne, pour $m < k$,

$$\frac{a_{m+1}^k}{a_m^k} = \frac{2m-1}{2m+1} \cdot \frac{m-k}{m+k};$$

on en conclut

$$\lim_{k=\infty} \frac{a_{m+1}^k}{a_m^k} = -\frac{2m-1}{2m+1},$$

et par récurrence

$$\lim_{k=\infty} a_m^k = (-1)^{m-1} \frac{4}{\pi(2m-1)} \quad (^1).$$

---

(1) Nous venons de calculer cette valeur limite par une voie différente de celle de Fourier, dont le calcul est un peu plus laborieux. Les principes essentiels du raisonnement n'en seront pas modifiés.

Enfin, en posant

$$a_m = \lim_{k=\infty} a_m^{(k)},$$

il vient

$$(5)\qquad v(x, y) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{e^{-(2m-1)x}\cos(2m-1)y}{2m-1}.$$

5. Ce résultat de Fourier est, sans doute, exact. En effet, en comparant la série (5) et ses dérivées de tous les ordres respectivement aux séries

$$\sum\frac{e^{-(2m-1)x}}{2m-1},\quad \sum e^{-(2m-1)x},\quad \sum(2m-1)e^{-(2m-1)x},\quad \ldots,$$

on en conclut qu'elles convergent uniformément pour $x > x_0 > 0$, qu'elles s'annulent uniformément lorsque x croît indéfiniment, que $v(x, y)$ s'annule pour $x > 0$, $y = \pm\frac{\pi}{2}$; et, enfin, la différentiation terme à terme étant légitime, la fonction $v(x, y)$ satisfait à l'équation (1). En ce qui concerne la partie $x = 0$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ de la frontière du domaine, la série (5) y converge vers la limite 1, et cela uniformément sur tout segment $\left(-\frac{\pi}{2} + h, \frac{\pi}{2} - h\right)$; de plus, la fonction $v(x, y)$ tend vers cette valeur lorsque, en partant de l'intérieur du domaine, on s'approche indéfiniment d'un tel segment. Quant aux points $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$, où les valeurs données subissent des changements brusques, la fonction $v(x, y)$ y reste indéterminée, les limites d'indétermination étant 0 et 1. Tous ces faits se rattachent à la remarque suivante. En introduisant les variables

$$r = e^{-x},\qquad \theta = y,\qquad z = re^{i\theta},$$

ce qui fait correspondre au domaine envisagé le demi-cercle

$$r < 1,\qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

la fonction $v(x, y)$ devient la partie réelle de l'une des branches de la fonction analytique

$$f(z) = \frac{1}{2i}\log\frac{i+z}{i-z}.$$

Cette partie réelle a une signification géométrique bien simple : elle est égale à la moitié de l'angle dont les côtés joignent le point z aux points i et $-i$. On en tire toutes les conséquences annoncées.

6. Le résultat de Fourier est donc exact. Mais, quant à son raisonnement, on y peut opposer bien des objections sérieuses. Fourier raisonnait sur une série inconnue ; il ne pouvait se douter des périls qui le menaçaient ; aussi, à cette époque, on avait encore confiance. Mais, depuis lors, on apporte plus de précaution à toute question concernant l'infini. Méfiant comme nous, Fourier aurait-il osé prendre le chemin qu'il avait suivi ?

Contentons-nous d'indiquer l'étape la plus scabreuse de son raisonnement. Il ramène son problème à celui de déterminer une série de forme (3), de façon qu'elle représente, dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, la fonction égale constamment à 1. Pour calculer les a_m, il différentie l'équation (3) une infinité de fois et pose $y = 0$; il en résulte le système d'équations (4). Or, à partir de la seconde de ces équations, les séries qui y figurent *divergeront* lorsqu'on y aura remplacé les a_m par leurs valeurs trouvées $\frac{(-1)^{m-1}4}{\pi(2m-1)}$. Donc, au premier abord, les valeurs obtenues pour les a_m ne paraissent pas satisfaire au système (4). Heureusement, nous savons aujourd'hui interpréter de vastes catégories de séries divergentes, en leur attribuant des *sommes* qui jouissent encore de certains caractères principaux des sommes des séries convergentes. Dans cet ordre d'idées, pour justifier le procédé de Fourier, on n'aura qu'à remplacer le système (4) par le suivant :

$$(6) \quad \begin{cases} 1 = \lim\limits_{r=1-0} \sum a_m r^{2m-1}, \\ 0 = \lim\limits_{r=1-0} \sum (2m-1)^2 a_m r^{2m-1}, \\ 0 = \lim\limits_{r=1-0} \sum (2m-1)^4 a_m r^{2m-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Cette interprétation du système (4) est bien conforme au problème traité [1]. En effet, les valeurs trouvées pour les a_m

[1] On aurait pu aussi appliquer d'autres méthodes de sommation, par exemple

satisfont au système (6), et ce fait se rattache à ce que la fonction $f(z)$, définie plus haut, est holomorphe pour $z = 1$.

7. Fourier applique sa méthode aussi à un problème plus général : *développer en série trigonométrique une fonction impaire donnée par sa série de Taylor*

$$f(x) = f'(0)x + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$ [2].

La fonction étant supposée impaire, il s'agit évidemment de trouver un développement de la forme

$$(7) \qquad f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m x.$$

Pour déterminer les b_m, Fourier se sert d'un procédé pareil à celui que nous venons d'exposer : il différentie les deux membres de (7) une infinité de fois et pose $x = 0$; ou plutôt, ce qui revient au même, il développe les deux membres de (7) en séries entières et il compare les coefficients des mêmes puissances. Ce procédé lui fournit un système infini d'équations aux inconnues b_m; il en prend les k premières, ne conserve que les k premières inconnues et résout le système réduit; puis il passe à la limite, si l'on peut appeler *passage à la limite* le calcul extrêmement hardi qu'il exécute. Ce calcul donne

$$b_m = (-1)^{m+1}\frac{2}{m\pi}\left[f(\pi) - \frac{1}{m^2}f''(\pi) + \frac{1}{m^4}f^{IV}(\pi) - \ldots\right].$$

Pour en déduire le résultat final, Fourier remarque que la série

$$s(x) = f(x) - \frac{1}{m^2}f''(x) + \frac{1}{m^4}f^{IV}(x) - \ldots$$

---

la série en question

$$\sum \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^{2k+1}}$$

est sommable à l'aide des moyennes arithmétiques d'ordre $2k$ et ce procédé fournit aussi, pour $k > 0$, la somme 0.

(2) Art. 207 et suiv.

satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{1}{m^2} s''(x) + s(x) = f(x).$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$s(x) = C_1 \cos mx + C_2 \sin mx$$
$$+ m \sin mx \int_0^x f(x) \cos mx \, dx - m \cos mx \int_0^x f(x) \sin nx \, dx.$$

Or, la fonction $s(x)$ étant impaire en même temps que $f(x)$, on a

$$C_1 = s(0) = 0;$$

et, en posant $x = \pi$, il résulte la formule bien connue

$$(8) \qquad b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin mx \, dx.$$

8. Le raisonnement de Fourier n'est pas exact, et même il ne le pourrait être rendu que dans des conditions très restrictives, portant sur la fonction donnée $f(x)$. Mais, d'autre part, la théorie des séries trigonométriques ayant été basée depuis sur des fondements plus solides, on sait maintenant que la validité de la formule (8) n'exige que des conditions très larges. En fait, pour la théorie des séries trigonométriques, le raisonnement de Fourier ne constitue qu'une curiosité intéressante de valeur purement historique. Mais, pour nous, il contient quelque chose de très précieux : c'est qu'il implique un principe extrêmement fécond au point de vue de nos équations. Voici ce principe, qui bien entendu devra encore être beaucoup précisé : Pour résoudre un système infini d'équations à une infinité d'inconnues, on limite le système aux k premières équations et l'on y néglige toutes les inconnues, sauf les k premières. Les solutions de ces systèmes tendent, pour k infini, vers la solution du système proposé.

Ce principe, dont la légitimité peut être justifiée sous des hypothèses larges, se montrerait très fécond pour la théorie en vue. Nous l'appellerons *principe des réduites*.

9. Nous venons d'examiner le principe des réduites au point de

vue du parti qu'en a tiré Fourier. Envisageons maintenant le même principe en partant d'un théorème classique qui appartient à la Théorie des fonctions. D'après Weierstrass, étant donnée la suite indéfinie des quantités a_i telles que $|a_i| \to \infty$, il existe une fonction entière

$$\mathfrak{F}(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots$$

admettant les a_i pour racines et n'en admettant pas d'autres. Les coefficients C_0, C_1, C_2, ... devront satisfaire aux équations

$$C_0 + C_1 a_i + C_2 a_i^2 + \ldots = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Je suppose, pour fixer les idées, que les a_i soient distincts et $\neq 0$. Alors le principe des réduites, appliqué à nos équations, conduira à former successivement les produits

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) = C_0^{(n)} + C_1^{(n)} z + \ldots + C_n^{(n)} z^n \qquad (C_0^{(n)} = 1).$$

En effet, chacun de ces produits correspond à un des systèmes réduits, de sorte que ce système sera satisfait par $C_0^{(n)}$, ..., $C_n^{(n)}$. Or, on sait que ce procédé ne converge que si les $|a_k|$ croissent assez rapidement. Ainsi, *nos équations peuvent être résolues en tout cas; mais le principe des réduites n'y s'applique que sous des conditions très restrictives.*

La méthode de Weierstrass consiste à ajouter aux produits ci-dessus des facteurs exponentiels accélérant la convergence. Je veux bien espérer que, un jour, on généralisera cette méthode de sorte à perfectionner le principe des réduites. Jusqu'aujourd'hui, on ne l'a pas encore essayé.

FÜRSTENAU, KÖTTERITZSCH.

10. Bien que la *Théorie analytique* de Fourier soit toujours restée la source de nombreuses recherches, les parties que nous venons de rappeler sont presque entièrement tombées en oubli. Pendant plus d'un demi-siècle, les auteurs qui s'occupaient de notre sujet y furent conduits indépendamment de Fourier et aussi sans faire allusion l'un à l'autre. Ce n'est que dans un Mémoire de G. Piola

que l'on trouve citées les recherches de Fourier; cet auteur appliquait le même principe des réduites à un problème particulier [1].

Les deux auteurs, E. Fürstenau et Th. Kötteritzsch, qui suivent dans l'ordre historique, sont sans importance pour le développement de la théorie. Toutefois, on trouve dans leurs travaux des méthodes plutôt en germe qui, retrouvées et rendues rigoureuses ces dernières années, se montraient bien fécondes pour la théorie en vue.

11. Fürstenau s'occupe du problème suivant :

Étant donnée l'équation

$$(9) \qquad c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m = 0 \qquad (c_0 \neq 0),$$

calculer celle des racines qui est la plus petite en valeur absolue [2]. A cet effet, il multiplie l'équation successivement par des puissances de plus en plus élevées de x, et il remplace x^n par x_n; ce procédé l'amène au système infini

$$\begin{aligned} -c_0 &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_m x_m, \\ 0 &= c_0 x_1 + c_1 x_2 + \ldots + c_{m-1} x_m + c_m x_{m+1}, \\ 0 &= \phantom{c_0 x_1 + {}} c_0 x_2 + \ldots + c_{m-2} x_m + c_{m-1} x_{m+1} + c_m x_{m+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Pour en tirer l'expression de x_1, il applique le principe des réduites. Il obtient

$$(10) \qquad x_1 = -c_0 \lim_{n \to \infty} \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n},$$

où Δ_n est le déterminant formé des coefficients de $x_1, \ldots, x_n$ dans les n premières équations.

Dans le cas où il n'y a qu'une seule racine, qui est la plus petite en valeur absolue, et que cette racine est simple, elle sera fournie par l'expression (10). Ce résultat se trouve démontré dans le

(1) PIOLA, *Sulla teoria delle fonzioni discontinue* (*Memorie d. Soc. italiana d. Scienze*, t. XX, p. 573-639). Nous citons ce Mémoire d'après l'indication de M. G. Loria (*Suppl. ai Rendiconti*, Palermo, 1907, p. 34).

(2) FÜRSTENAU, *Darstellung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coeffizienten*, Programmabhandlung, Marburg, 1860; *Neue Methode zur Darstellung und Berechnung der imaginären Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coeffizienten*, Progr.-abh., Marburg, 1867.

Mémoire de Fürstenau d'une façon tout à fait rigoureuse, mais par un calcul assez laborieux. D'ailleurs, d'après une remarque de H. Naegelsbach, *tout revient à ce que la fonction*

$$R(x) = \frac{1}{c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m}$$

admet le développement en série entière

$$R(x) = \frac{1}{c_0} - \frac{\Delta_1}{c_0^2} x + \frac{\Delta_2}{c_0^3} x^2 - \frac{\Delta_3}{c_0^4} x^3 + \ldots \quad [1].$$

En effet, soit α la racine dont il s'agit, et soit A le résidu de $R(x)$ par rapport à α. Les pôles de la fraction rationnelle

$$r(x) = R(x) - \frac{A}{1 - \frac{x}{\alpha}}$$

étant plus éloignés de l'origine que le point α, la série

$$r(x) = \frac{1}{c_0} - A + \left(-\frac{\Delta_1}{c_0^2} - \frac{A}{\alpha}\right)x + \left(\frac{\Delta_2}{c_0^3} - \frac{A}{\alpha^2}\right)x^2 + \ldots$$

converge, pour $x = \alpha$; en particulier, ses termes tendent vers zéro et, par conséquent,

$$\frac{\Delta_n(-\alpha)^n}{c_0^{n+1}} \to A.$$

Il en résulte que

$$-c_0 \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \alpha \frac{\dfrac{\Delta_{n-1}(-\alpha)^{n-1}}{c_0^n}}{\dfrac{\Delta_n(-\alpha)^n}{c_0^{n+1}}} \to \alpha.$$

La méthode de Fürstenau s'étend immédiatement à des équations transcendantes.

Observons encore que si l'on écrit, pour abréger,

$$R(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

---

(1) NAEGELSBACH, *Studien zu Furstenaus neuer Methode der Darstellung und Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten* (*Archiv f. Math. u. Phys.*, t. LIX, 1876, p. 147-192).

notre résultat devient

$$\alpha = \lim_{n=\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

C'est un résultat élémentaire et bien connu qui porte sur le développement en série entière de toute fonction admettant un pôle simple α et dont les autres points singuliers sont plus éloignés de l'origine (¹). Ce résultat fut généralisé par M. Hadamard, qui se proposait de déterminer plusieurs pôles à la fois (²). D'autre part, Fürstenau lui-même a étendu sa méthode au cas de racines multiples, et aussi au calcul simultané de plusieurs racines. Il y aurait un certain intérêt à comparer ses calculs à ceux de M. Hadamard.

12. Dans tout ce qui précède, il ne s'agissait que des systèmes particuliers. Kötteritzsch envisage du premier coup le système général

$$(11) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

en ne lui imposant que des conditions peu restrictives (³).

Pour le résoudre, il le réduit d'abord à la forme plus particulière

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{r} b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3 + \ldots = \beta_1, \\ b_{22} x_2 + b_{23} x_3 + \ldots = \beta_2, \\ b_{33} x_3 + \ldots = \beta_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Cette réduction se fait par un calcul tout élémentaire. En effet, supposons que les mineurs diagonaux

$$|a_{ik}|_1 = a_{11}, \qquad |a_{ik}|_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad \ldots$$

ne s'annulent pas; alors, pour obtenir le système correspon-

(¹) König, *Ueber eine Eigenschaft der Potenzreihen* (*Math. Annalen*, t. XXIII, 1884, p. 447-449).

(²) Hadamard, *Sur la recherche des discontinuités polaires* (*Comptes rendus*, 8 avril 1889). *Voir* aussi Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, p. 38-43. *Cf.* encore le Mémoire peu connu : *Worpitzky*, *Beiträge zur Functionentheorie*, Progr.-Abh., Berlin, 1870, dont je viens d'apprendre l'existence pendant les dernières corrections.

(³) Kötteritzsch, *Ueber die Auflösung eines Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen* (*Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, t. XV, 1870, p. 1-15, 229-268).

dant (12), on n'aura qu'à poser $b_{1k} = a_{1k}$, $\beta_1 = \alpha_1$, et pour $n > 1$

$$b_{n,k} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,k} \end{vmatrix},$$

$$\beta_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & \alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Cela fait, il reste à résoudre le système (12). Supposons qu'il s'agisse d'évaluer l'inconnue x_n. Alors les $n - 1$ premières équations n'entreront pas dans le calcul; de celles qui restent, on éliminera successivement x_{n+1}, x_{n+2}, ... Ce procédé fournit un développement de x_n de la forme

$$x_n = B_{n,n}\beta_n + B_{n,n+1}\beta_{n+1} + \dots,$$

où les B sont des expressions formées des coefficients b_{ik}, qui se calculent facilement par des déterminants.

Or, on se rend aisément compte de ce que la méthode de Kötteritzsch est au fond la même que celle de Fourier; elle n'en diffère qu'en ce qu'elle comporte un procédé de calcul formel qui pourra être commode dans certains cas. Mais, au point de vue de l'infini, les deux méthodes ne diffèrent pas. Quant à ce point de vue, Kötteritzsch ne nous apprend rien de nouveau; il se contente de dire que, pour les indices grands, les termes doivent être très petits, de sorte qu'on puisse les négliger.

Enfin, Kötteritzsch applique sa méthode à plusieurs cas particuliers et y étend des formules connues pour les systèmes finis. Cependant, ici aussi, presque tout est fondé sur l'analogie [1].

LA NOTE DE M. APPELL ET LA CRITIQUE DE POINCARÉ.

13. C'est à Poincaré que revient le mérite d'avoir fait, sur notre sujet, les premières recherches critiques. Son attention y fut appelée par les travaux de MM. Hill (1877) et Appell (1885). Nous reviendrons plus loin à la méthode de M. Hill.

---

[1] Il y a lieu ici de mentionner un travail de M. von Koch qui paraîtra dans les *Comptes rendus du Congrès intern. de Cambridge*, 1912. M. von Koch y étudie les systèmes du type (12) sous des conditions très larges. Je me borne

M. Appell se propose de *développer la fonction elliptique* $\frac{\Theta_1}{\Theta}$ *en série trigonométrique par la méthode des coefficients indéterminés* (¹). D'après les notations de Jacobi, on a

$$\Theta\left(\frac{Kx}{\pi i}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{nx}, \qquad \Theta_1\left(\frac{Kx}{\pi i}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{nx}, \qquad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}};$$

les périodes $2K$ et $2iK'$ sont rangées de sorte que la partie réelle du rapport $\frac{K'}{K}$ devienne positive, et que, par conséquent, $|q| < 1$.

Il s'agit de calculer les coefficients A_n du développement

$$\frac{\Theta_1\left(\frac{Kx}{\pi i}\right)}{\Theta\left(\frac{Kx}{\pi i}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{nx}.$$

On chasse le dénominateur, puis on effectue le produit dans le second membre et l'on égale les coefficients de e^{nx}, et cela pour tous les n. On obtient

$$q^{n^2} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-\mu} q^{(n-\mu)^2} A_\mu \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

d'où, en simplifiant,

$$(-1)^n = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} (-1)^\mu q^{\mu^2-2\mu n} A_\mu \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

à indiquer un résultat particulier lequel est lié entre autres au problème traité par Fürstenau. *Soit* $f(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ *une fonction entière et soit* α *celle des racines qui est la plus proche à l'origine. De plus, soit* $x_1, x_2, \ldots$ *une solution du système*

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots \\ 0 &= \qquad x_1 + c_1 x_2 + c_2 x_3 + c_3 x_4 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Alors on a

$$\limsup_{n=\infty} |x_n|^{\frac{1}{n}} = |\alpha|.$$

Voir aussi la Thèse de M. Borel dont nous parlerons plus loin, et STÄCKEL, *Periodische Funktionen und Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen* (*Festschrift H. Weber*, 1912, p. 396-409).

(¹) APPELL, *Sur une méthode élémentaire pour obtenir les développements en séries trigonométriques des fonctions elliptiques* (*Bull. Soc. math. de France*, t. XIII, 1885, p. 13-18).

Or, le rapport des fonctions impaires $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}$ donnant une fonction paire, on a $A_{-\mu} = A_\mu$; par conséquent, notre système se réduit au suivant :

$$(-1)^n = A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^\mu q^{\mu^2} (q^{2n\mu} + q^{-2n\mu}) A_\mu \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

ou enfin, en posant

$$\omega = \frac{2\pi K' i}{K},$$

le système devient

$$(-1)^n = A_0 + 2\sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^\mu q^{\mu^2} A_\mu \cos n\mu\omega \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Pour résoudre ce système, M. Appell se sert du principe des réduites; il prend les $m+1$ premières équations, n'y conserve que les $m+1$ premières inconnues et supprime tous les termes qui dépendent des autres inconnues; enfin il fait croître m indéfiniment. Soit $A_0^{(m)}, A_1^{(m)}, \ldots, A_m^{(m)}$ la solution du système réduit; on a

$$A_0^{(m)} = \frac{\Delta(\pi, \omega, 2\omega, \ldots, m\omega)}{\Delta(0, \omega, 2\omega, \ldots, m\omega)},$$

et, pour $\mu > 0$,

$$(-1)^\mu q^{\mu^2} A_\mu^{(m)} = \frac{\Delta[0, \omega, \ldots, (\mu-1)\omega, \pi, (\mu+1)\omega, \ldots, m\omega]}{\Delta(0, \omega, 2\omega, \ldots, m\omega)},$$

où

$$\Delta(a, b, \ldots, l) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \cos a & \cos b & \ldots & \cos l \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \cos ma & \cos mb & \ldots & \cos ml \end{vmatrix} = C\prod(\cos a - \cos b).$$

C est une constante numérique, et le produit est étendu à toutes les différences des quantités $\cos a$, $\cos b$, $\ldots$, $\cos l$, prises deux à deux. De là, en introduisant de nouveau, au lieu de ω, la quantité q, on obtient

$$A_0^{(m)} = \prod_{\nu=1}^{m} \frac{(1+q^{2\nu})^2}{(1-q^{2\nu})^2}, \qquad A_\mu^{(m)} = \frac{2q^\mu}{1-q^{2\mu}} \frac{\prod_{\nu=1}^{m}(1+q^{2\nu})^2}{\prod_{\nu=1}^{m-\mu}(1-q^{2\nu}) \prod_{\nu=1}^{m+\mu}(1-q^{2\nu})}.$$

Enfin, en faisant croître indéfiniment l'indice m, il résulte

$$A_0 = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^{2\nu}}{1-q^{2\nu-1}}\right)^2 = \frac{\pi}{2qK}\sqrt{\frac{1}{k'}}, \qquad A_\mu = \frac{2q^\mu}{1-q^{2\mu}} A_0.$$

On obtient ainsi le développement connu

$$\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)} = \frac{\pi}{2qK}\sqrt{\frac{1}{k'}}\left(1 + 4\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{q^\mu}{1-q^{2\mu}} \cos\frac{\mu\pi z}{K}\right).$$

14. Dans le même *Bulletin* où paraissait la Note de M. Appel dont nous venons de parler et immédiatement après celle-ci, se trouvent les premières remarques critiques de Poincaré [1]. Il se demande dans quel cas on peut légitimement employer la méthode qui a réussi à M. Appell? C'est-à-dire qu'il examine, dans certains cas, *la légitimité du principe des réduites*.

Il envisage d'abord le système

$$(13) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^i x_k = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

en supposant que $|a_{k+1}| > |a_k|$, et que $|a_k| \to \infty$ pour $k \to \infty$, et il cherche à y satisfaire de sorte que les séries qui figurent dans les premiers membres soient convergentes.

Sa méthode repose entièrement sur les éléments de la Théorie de fonctions.

Formons la fonction entière $F(z)$ ayant pour zéros simples les nombres a_k, et ne s'annulant pas ailleurs. On sait depuis Weierstrass que, sous l'hypothèse $|a_k| \to \infty$, de telles fonctions existent et se calculent moyennant des produits infinis. Pour fixer les idées, supposons que $\sum \frac{1}{|a_k|}$ converge ; alors on posera

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right).$$

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots$ une infinité de cercles ayant pour centre l'origine, et tels que le cercle C_k sépare les points $z = a_k$

---

[1] POINCARÉ, *Remarques sur l'emploi de la méthode précédente* (*Bull. Soc. math. de France*, t. XIII, 1885, p. 19-27).

et $z = a_{k+1}$. Supposons que

$$(14) \qquad \int_{C_k} \frac{z^i\,dz}{F(z)} \to 0 \qquad \text{pour } k \to \infty,$$

et cela quel que soit i. Or, d'après Cauchy, la relation précédente peut s'écrire

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^i A_k = 0,$$

où l'on vient de désigner par A_k le résidu de $\frac{1}{F(z)}$ pour $z = a_k$. Par conséquent, sous l'hypothèse faite, les résidus de $\frac{1}{F(z)}$ fourniront la solution du système (13). Or on a

$$A_k = \frac{-a_k}{\left(1 - \frac{a_k}{a_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{a_k}{a_{k-1}}\right)\left(1 - \frac{a_k}{a_{k+1}}\right)\cdots},$$

et c'est à la même solution que conduirait le principe des réduites.

15. Le système (4) de Fourier entre en principe dans le type envisagé. En effet, en y laissant à part la première équation, et en posant $(2m-1)^2 = b_m$, $(2m-1)^2 a_m = x_m$, le système s'écrira

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m^i x_m = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

et les b_m croissent indéfiniment.

Calculons la fonction $F(z)$. On a

$$F(z) = \prod_{m=1}^{\infty}\left[1 - \frac{z}{(2m-1)^2}\right] = \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{z}.$$

Les résidus de $\frac{1}{F(z)}$ sont

$$B_m = \frac{1}{F'(b_m)} = \frac{-\frac{\pi}{4}\sqrt{b_m}}{\sin\frac{\pi}{2}\sqrt{b_m}} = \mp\frac{\pi}{4}(2m-1).$$

Donc ils représentent, à un facteur près, la solution de Fourier.

Cependant ce n'est pas une solution telle que l'exigeait Poincaré : les séries $\sum b_m^i B_m$ ne convergent pas. Cet exemple montre très nettement que l'hypothèse (14) ne peut pas être supprimée.

16. Voilà maintenant une remarque fort intéressante de Poincaré; au premier coup d'œil, elle aura l'air d'être paradoxale. Supposons qu'on ait trouvé une solution $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ... du système (13); et supposons encore que les α_k ne s'annulent pas. Soit p un entier positif quelconque ; il est évident que les $x_1 = a_1^p \alpha_1$, $x_2 = a_2^p \alpha_2$, ... satisfont aussi au système (13). Il en sera de même pour $x_1 = f(a_1)\alpha_1$, $x_2 = f(a_2)\alpha_2$, ..., $f(z)$ désignant un polynome quelconque. C'est juste. Envisageons maintenant, au lieu des polynomes, la fonction entière

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots.$$

Multiplions les équations (13), en partant de la $(i+1)^{\text{ième}}$, successivement par c_0, c_1, c_2, ..., et ajoutons terme à terme : il viendra

$$(15) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^i f(a_k)\alpha_k = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Voici donc le fait paradoxal qui suit immédiatement de ce raisonnement : Si le raisonnement était exact, toute suite arbitraire β_1, β_2, ... satisferait au système (13). En effet, on peut choisir la fonction entière $f(z)$ de sorte qu'elle prenne, pour $z = a_1, a_2, a_3, \ldots$, respectivement les valeurs $\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \ldots$. Pour avoir une telle fonction, soit $F(z)$ la fonction entière déjà considérée, s'annulant pour $z = a_1, a_2, \ldots$, et n'ayant pas d'autres zéros. D'autre part, d'après le théorème de M. Mittag-Leffler, on peut construire une fonction méromorphe $R(z)$ qui ait les a_k pour infinis simples avec les résidus $\frac{\beta_k}{\alpha_k F'(a_k)}$, et n'ayant pas d'autres infinis. Donc, en posant $f(z) = F(z)\,R(z)$, on aura la fonction entière exigée. Appliquées à cette fonction $f(z)$, les formules (15) donnent

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^i \beta_k = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Si le raisonnement était légitime, ces équations devraient avoir lieu pour tout choix des quantités β_k. Il ne l'est pas évidemment, car il n'est pas permis, en général, d'ajouter terme à terme une infinité de séries.

Pour rendre le raisonnement exact, faisons l'hypothèse que, pour la solution $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., les premiers membres des équations (13) soient des séries absolument convergentes. Posons

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^i \alpha_k| = S_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Cela posé, il est manifeste que toujours, quand la série

$$|c_0| S_0 + |c_1| S_1 + |c_2| S_2 + \ldots$$

converge, notre raisonnement devient exact, l'addition terme à terme étant permise. Or, la fonction $f(z)$ ne dépendant que des quantités a_k, α_k, β_k, les coefficients c_k s'exprimeront, d'une certaine façon, par ces mêmes quantités. Par conséquent, tout revient à ce qu'une certaine série, dont les termes sont des fonctions bien déterminées des a_k, α_k et des β_k, converge. Quand la série converge, les β_k donnent une solution du système (13). Donc nous venons de rattacher le problème de la résolution du système (13), dans une certaine mesure, à une simple question de convergence.

17. Les équations traitées par M. Appell ne rentrent pas dans le type considéré, mais dans le suivant

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^i x_k = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

où les quantités $|a_k|$ tendent en croissant vers ∞ pour $k \to \infty$, et tendent en décroissant vers 0 pour $k \to -\infty$. Pour traiter ce type, Poincaré se sert d'une méthode analogue à celle du n° 14; la différence principale consiste en ce que la fonction $F(z)$ admettant les a_k pour zéros ne sera plus une fonction entière; en effet, l'origine étant point limite des a_k, elle sera nécessairement un point singulier essentiel.

L'étude détaillée de la Note de Poincaré et des remarques com-

plémentaires dont il la faisait suivre dans une seconde Note (¹), exigerait de pénétrer encore plus loin dans la Théorie des fonctions. D'ailleurs, il n'y s'agit pas des méthodes proprement dites ; ce sont plutôt des idées qui attendent encore d'être développées (²).

(¹) POINCARÉ, *Sur les déterminants d'ordre infini* (*Bull. Soc. math. de France*, t. XIV, 1886, p. 77-90).

(²) Le seul progrès dans cette direction est dû à M. Borel. Il y fut conduit par le problème suivant traité dans sa Thèse [*Sur quelques points de la Théorie des fonctions* (*Annales de l'École Norm. sup.*, 3ᵉ série, t. XII, 1895, p. 9-55)] : Déterminer une série entière $f(z) = \sum b_n z^n$ convergente pour $z = 1$ ainsi que ses dérivées, les valeurs $f^{(n)}(1) = F_n$ de la série et de ses dérivées étant données pour $z = 1$. Voilà l'idée essentielle du raisonnement de M. Borel. *Pour résoudre les équations $f^{(n)}(1) = F_n$, il suffit de savoir les résoudre avec une certaine approximation.* Supposons en effet que l'on ait trouvé une série entière $g(z) = \sum b_n z^n$ telle que $|g^{(n)}(1) - F_n| < C$ pour tous les n. Posons $g^{(n)}(1) - F_n = c_n$; la série $\sum \frac{c_n}{n!}(z-1)^n$ définit une fonction entière $h(z)$ et l'on aura $f(z) = g(z) - h(z)$. Donc tout revient à résoudre les équations $f^{(n)}(1) = F_n$ avec l'approximation indiquée. Posons $b_0 = 0$, $b_k = \pm \frac{1}{k}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$, en choisissant les signes et l'indice n de sorte que $|b_1 + \ldots + b_n - F_0| < 1$. Posons de plus $b_k = \pm \frac{1}{k^2}$ pour $k = n+1, \ldots, n'$, en choisissant les signes et l'indice n' de sorte que $|b_1 + 2b_2 + \ldots + n'b_{n'} - F_1| < 1$. Puis on posera $b_k = \pm \frac{1}{k^3}$ pour $k = n'+1, \ldots, n''$, de sorte que

$$|2b_2 + 2.3\,b_3 + \ldots + (n''-1)n''\,b_{n''} - F_2| < 1.$$

Continué, ce procédé conduira à une fonction $g(z)$ telle que $|g^{(n)}(1) - F_n| < 3$. On s'en rend aisément compte ; tout revient à ce que la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge et que, d'autre part, $\sum \frac{1}{k^2} < 2$. Observons encore que le raisonnement suppose que les données F_n soient réelles, mais on voit aisément que cette hypothèse n'est pas essentielle.

M. Borel applique un procédé analogue aux systèmes

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^i_k x_k = A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

où a_k augmente indéfiniment avec k. Ce procédé consiste à poser, suivant les indices, $x_k = \pm \frac{1}{k}$, $\pm \frac{1}{k a_k}$, $\pm \frac{1}{k a_k^2}$, ..., et cela de sorte que les quantités $B_i = A_i - \sum a^i_k x_k$ restent bornées dans leur ensemble. Donc on peut ramener le cas général au cas particulier où les quantités A_i sont bornées.

Dans ce cas particulier, M. Borel résout le système en modifiant légèrement l'idée de Poincaré exposée dans le n° 14. Soit $F(z)$ une fonction admettant pour

Mais ce que j'ai dit s'applique seulement à la première Note et à la première partie de la seconde. Dans la seconde partie, en quittant brusquement l'ordre d'idées suivi, Poincaré pose les premiers fondements d'une théorie des déterminants infinis qui fera le sujet du Chapitre suivant.

---

zéros simples les quantités a_k et choisissons les quantités G_k de sorte que les séries $\sum \left| \frac{a_k^l}{F'(a_k) G_k} \right|$ convergent. Cela étant, construisons une fonction entière $G(z)$ telle que $G(a_k) = G_k$. En posant $\frac{F(z) G(z)}{z - a_k} = \sum c_n^k z^n$, une solution sera fournie par les formules

$$x_k = \frac{\Sigma c_i^k A_i}{F'(a_k) G_k}.$$

CHAPITRE II.

LES DÉTERMINANTS INFINIS.

HISTORIQUE ET GÉNÉRALITÉS.

18. L'extension des méthodes algébriques aux systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues conduisait naturellement à la considération des déterminants infinis. Des allusions à ces algorithmes se trouvent déjà dans le travail cité de Kötteritzsch. Généralement on attribue leur introduction à M. G. W. Hill. Ce savant astronome s'en est servi dans un Mémoire fort important sur le mouvement du périgée de la Lune (¹), et c'est par ce Mémoire que l'attention de Poincaré fut attirée sur ce point. M. Hill envisage l'équation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \theta x = 0, \tag{1}$$

où θ est une série de la forme suivante :

$$\theta = \theta_0 + 2\theta_1 \cos t + 2\theta_2 \cos 2t + \ldots.$$

En posant $\theta_{-n} = \theta_n$, on peut aussi écrire

$$\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} \theta_n e^{int}. \tag{2}$$

(¹) HILL, *On the part of the motion of the lunar perigee wich is a function of the mean motions of the sun and moon*, Cambridge, Mass., U. S. A., 1877, (réimprimé dans les *Acta mathematica*, t. VIII, 1886, p. 1). *Cf.* aussi la communication de M. Adams dans les *London Astr. Soc. Monthly Not.*, t. XXXVIII, 1877, p. 13; il y annonce que l'étude du mouvement du nœud de la Lune l'a déjà conduit antérieurement à un déterminant infini, mais il ne publiait pas ses résultats.

L'intégrale générale de l'équation (1) peut être mise sous la forme

$$w = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{i(n+c)t},$$

les b_n et c étant des constantes convenablement choisies. En portant cette série au lieu de w et la série (2) au lieu de θ dans l'équation (1), et en comparant les coefficients, on obtiendra les équations, en nombre infini,

$$(3) \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta_{n-k} b_k - (n+c)^2 b_n = 0 \qquad (n = -\infty, \dots, +\infty),$$

et l'on aura à déterminer les b_n et c de sorte que ces équations soient satisfaites.

M. Hill traite le système (3) par le procédé dont on se sert le plus souvent pour les systèmes finis, savoir par des déterminants. Il introduit des *déterminants infinis*, il y applique les règles ordinaires du calcul des déterminants, et sa hardiesse est justifiée par le succès, les résultats étant d'accord avec l'observation. Mais il n'a pas démontré la légitimité de sa méthode. Cette lacune fut bientôt comblée par Poincaré qui développa à cette occasion les premiers principes d'une théorie des déterminants infinis [1]. Les recherches de Poincaré furent continuées jusqu'à ces derniers temps et approfondies beaucoup par M. von Koch à qui l'on doit, pour ainsi dire, presque tous les résultats essentiels de la théorie [2].

19. Considérons le système

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \dots),$$

---

(1) *Voir* la Note citée au n° 17, ou aussi l'Ouvrage du même auteur : *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. II, p. 260.

(2) Pour la liste des travaux de M. von Koch, concernant les déterminants infinis, *cf.* son rapport : *Sur les systèmes d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (*Compte rendu du Congrès des Mathématiciens*, tenu à *Stockholm*, 1909). Ajoutons à cette liste les deux Notes : *Sur un nouveau critère de convergence pour les déterminants infinis* (*Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, t. VII, 1911, n° 4); *Sur certains systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnus* (même *Arkiv*, t. VIII, 1912, n° 9), et la Communication signalée au n° 12.

et supposons que l'on puisse y appliquer légitimement le principe des réduites. Supposons de plus que, pour n suffisamment grand, on ait

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Cela posé, l'inconnue x_k sera fournie par

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Delta_n^{(k)}}{\Delta_n},$$

le symbole $\Delta_n^{(k)}$ désignant ce que devient Δ_n lorsqu'on y remplace par $c_1, \dots, c_n$ les termes de la colonne k. Or il peut arriver que le dénominateur Δ_n lui-même tende, pour n infini, vers une limite Δ; et si encore cette limite $\neq 0$, on pourra affirmer que le numérateur tend aussi vers une limite $\Delta^{(k)}$ et que

$$x_k = \frac{\Delta^{(k)}}{\Delta}.$$

Cependant, ceci n'est que le cas le plus simple; le système (3), étant homogène, n'y entre pas; il exigera une discussion plus délicate. Pour l'aborder par des déterminants infinis, il faudra étudier ces déterminants d'un peu plus près. Et il convient aussi d'observer que même dans le cas plus simple que nous venons de considérer, nous avons supposé, *a priori*, que le principe des réduites s'applique. On sait que ce fait n'est pas évident; que, de plus, il peut être en défaut; et même les limites $\Delta \neq 0$ et $\Delta^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) peuvent exister sans que les valeurs $x_k = \dfrac{\Delta^{(k)}}{\Delta}$ satisfassent au système (4). Par exemple, lorsque $a_{ik} = 0$ pour $k < i$ et 1 pour $k > i$ et $c_i = (-1)^i$, on a $\Delta = 1$, $\Delta^{(k)} = 2(-1)^k$, ce qui donnera $x_k = 2(-1)^k$; en portant ces valeurs dans les équations (4), les premiers membres divergent (¹).

Ces remarques suffisent pour montrer que, si l'on veut baser

(¹) M. Cazzaniga a donné une série d'exemples de ce genre, montrant tous quel soin il faut apporter aux déterminants infinis : *Sui determinanti d'ordine infinito* (*Annali di Matematica*, 2ᵉ série, t. XXVI, 1897, p. 143-218); *Intorno ad un tipo di determinanti nulli d'ordine infinito* (même recueil, 3ᵉ série, t. I, 1898, p. 83-94).

une théorie des systèmes infinis d'équations à l'étude des déterminants infinis, il faudra d'abord préciser nettement les conditions où l'on se pose. Des hypothèses bien choisies permettront d'*étendre aux déterminants infinis les règles ordinaires portant sur les déterminants d'ordre fini* et, par suite, de les appliquer à la théorie qui nous occupe.

Sans doute, certaines des règles les plus simples s'étendent immédiatement à tous les déterminants infinis. Par exemple : on peut échanger entre elles les lignes et les colonnes ; échanger deux lignes entre elles revient à multiplier le déterminant par -1 ; multiplier tous les éléments d'une ligne par le même nombre revient à multiplier par ce nombre le déterminant lui-même ; le déterminant s'annule si deux de ses lignes se confondent ; il ne change pas lorsqu'on ajoute aux éléments d'une ligne les éléments correspondants d'une autre, etc. Tout cela découle immédiatement des propriétés analogues des déterminants d'ordre fini.

LES DÉTERMINANTS NORMAUX.

20. Envisageons le tableau à double entrée

$$\begin{array}{llll} 1+a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots \\ a_{21}, & 1+a_{22}, & a_{23}, & \ldots \\ a_{31}, & a_{32}, & 1+a_{33}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{array}$$

et supposons que la série deux fois infinie $\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|$ converge.

Posons $A_k = \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ik}|$; d'après l'hypothèse faite, $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ converge. On en conclut, en appliquant une règle de convergence bien connue, que les produits

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} (1+A_k)$$

tendent aussi, pour n infini, vers une limite Π.

Comparons maintenant les deux déterminants

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 - a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{n+p} = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+p} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n+p,1} & \dots & \dots & 1 - a_{n+p,n+p} \end{vmatrix}.$$

Ce sont des sommes de certains produits des quantités a_{ik} affectés des signes convenables. Les mêmes produits figurent aussi, en valeur absolue, dans les développements de Π_n, Π_{n+p} suivant les $|a_{ik}|$. De plus, Δ_{n+p} contient tous les termes de Δ_n, et les autres termes de Δ_{n+p} figurent, en valeur absolue, dans le développement de $\Pi_{n+p} - \Pi_n$. On en conclut

$$|\Delta_n| \leqq \Pi_n; \qquad |\Delta_{n+p} - \Delta_n| \leqq \Pi_{n+p} - \Pi_n;$$

par conséquent, *la série*

$$\Delta_1 + (\Delta_2 - \Delta_1) + (\Delta_3 - \Delta_2) + \dots$$

converge absolument vers une quantité $\Delta = \lim \Delta_n$ *telle que* $|\Delta| \leqq \Pi$.

21. Remplaçons dans notre tableau les éléments de la colonne numérotée k par des quantités c_i; nous supposons que ces quantités soient bornées dans leur ensemble, c'est-à-dire qu'elles restent, en valeur absolue, inférieures à une certaine quantité C. Soit $n > k$ et désignons par $\Delta_n^{(k)}$ ce que devient Δ_n après la modification indiquée, et par $\Pi_n^{(k)}$ ce que devient Π_n lorsqu'on y supprime le facteur $1 + A_k$. Les termes de $\Delta_n^{(k)}$ et de $\Delta_{n+p}^{(k)} - \Delta_n^{(k)}$ figurent aussi, en valeur absolue et sauf un facteur $|c_i|$, dans les développements de $\Pi_n^{(k)}$ et de $\Pi_{n+p}^{(k)} - \Pi_n^{(k)}$. On en conclut

$$|\Delta_n^{(k)}| \leqq C\Pi_n^{(k)}, \qquad |\Delta_{n+p}^{(k)} - \Delta_n^{(k)}| \leqq C(\Pi_{n+p}^{(k)} - \Pi_n^{(k)}).$$

Par conséquent, le déterminant $\Delta^{(k)} = \lim \Delta_n^{(k)}$ converge et $|\Delta^{(k)}| \leqq C\Pi$.

Posons en particulier $c_i = 1$ et $c_j = 0$ pour $j \neq i$; le déterminant $\Delta_n^{(k)}$ deviendra ce que l'on appelle le mineur $\binom{i}{k}$ du détermi-

nant Δ_n. De même, nous appellerons $\Delta^{(k)}$ le mineur $\binom{i}{k}$ de Δ. Il suit immédiatement du fait analogue concernant les déterminants d'ordre fini, que le mineur $\binom{i}{k}$ ne change pas de valeur quand on y remplace par des zéros ou par des quantités quelconques les éléments de la ligne numérotée i, sauf le $k^{\text{ième}}$. Cette remarque montre que, dans la formation des mineurs, lignes et colonnes jouent le même rôle.

Nous allons démontrer le théorème suivant dont la première partie correspond à la règle bien connue de Laplace :

Quelles que soient les quantités c_i bornées dans leur ensemble, on a

$$\Delta^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{i}{k} c_i, \tag{5}$$

et la série à droite converge absolument.

En particulier, la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \binom{i}{k} \right| \tag{6}$$

converge et sa valeur limite ne surpasse pas Π.

La convergence absolue de la série au second membre de (5) découle immédiatement de la convergence de la série (6). Cette série se composant des termes positifs, il suffit de prouver que ses sommes partielles ne surpassent pas une certaine borne finie. Je dis qu'elles ne surpassent pas la borne Π. En effet posons, dans $\Delta^{(k)}$, $c_i = \overline{\text{signe}} \binom{i}{k}$ pour $i \leqq n$, $c_i = 0$ pour $i > n$ [1]. Cela posé, on a $C = 1$, et $\Delta^{(k)}$ est la somme des n premiers termes de la série (6); donc, en vertu de l'inégalité $|\Delta^{(k)}| \leqq C\Pi$, cette somme ne peut pas surpasser la valeur Π.

Il nous reste encore à vérifier l'identité (5). La somme s_n des

---

[1] Ici et dans la suite, la notation $\overline{\text{signe}}\, z$ indique 0, quand $z = 0$ et $\frac{|z|}{z}$ dans les autres cas. Dans ces cas, en posant $z = re^{i\theta}$, $\overline{\text{signe}}\, z$ devient $e^{-i\theta}$. Pour z réel, positif ou négatif, $\overline{\text{signe}}\, z = \pm 1$, suivant le signe de z.

n premiers termes de la série à droite est ce que devient $\Delta^{(k)}$ lorsqu'on y remplace par des zéros les c_i, à partir de c_{n+1}. Par suite, la différence $\Delta^{(k)} - s_n$ est égale à ce que devient $\Delta^{(k)}$ après avoir annulé les n premiers c. Désignons ce dernier déterminant par $\Delta^{(k,n)}$ et soit $\Delta_n^{(k,n)}$ le déterminant fini formé de ses n^2 premiers éléments. On a

$$|\Delta^{(k,n)} - \Delta_n^{(k,n)}| \leq C(\Pi - \Pi_n).$$

D'autre part, lorsque $n \geqq k$, le déterminant $\Delta_n^{(k,n)}$ s'annule, parce qu'il contient toute une colonne de zéros; par suite, notre inégalité devient

$$|\Delta^{(k)} - s_n| = |\Delta^{(k,n)}| \leq C(\Pi - \Pi_n).$$

Mais pour n infini, $\Pi - \Pi_n \rightarrow 0$, et alors $s_n \rightarrow \Delta^{(k)}$, ce qu'il fallait prouver.

Indiquons encore les cas particuliers de (5) :

$$(7) \qquad \binom{j}{k} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \binom{i}{k} = \substack{\Delta \\ 0} \qquad \text{suivant que } k \substack{= \\ \neq} j.$$

Enfin, de la convergence de la série (6) résulte immédiatement la convergence absolue de la série double

$$(8) \qquad \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{jk}\, c_i \binom{i}{k}.$$

Dans tout ce qui précède, lignes et colonnes peuvent échanger leurs rôles. Entre autres, on a

$$(9) \qquad \binom{i}{j} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \binom{i}{k} = \substack{\Delta \\ 0} \qquad \text{selon que } i \substack{= \\ \neq} j.$$

22. On appelle *déterminants normaux* les déterminants infinis Δ du type considéré. Quant à l'historique, remarquons que Poincaré étudiait les déterminants Δ et $\Delta^{(k)}$ en posant encore une condition restrictive, savoir que $a_{ii} = 0$ pour tous les i. Il est à peu près évident que le type considéré se réduit aisément à ce type plus particulier. Par exemple, lorsque les $a_{ii} \neq -1$, on n'aura qu'à diviser les colonnes i par $1 + a_{ii}$. Mais on n'a pas besoin de faire une telle réduction; M. von Koch a observé que la méthode de

Poincaré, peu modifiée, s'étend à tous les déterminants normaux : et c'est précisément cette méthode que nous venons d'exposer.

Ajoutons que les considérations précédentes et aussi celles qui suivent s'étendent immédiatement aux *déterminants infinis dans quatre directions*, c'est-à-dire aux déterminants qui correspondent à des tableaux tels que les indices i, k varient en allant de $-\infty$ à $+\infty$. Dans ce cas, on entendra par déterminant infini la limite, pour $m = -\infty$, $n = +\infty$, du déterminant d'ordre fini où les indices vont de m à n. Le système (3) de M. Hill conduit à de tels déterminants.

APPLICATION DES DÉTERMINANTS NORMAUX AUX SYSTÈMES D'ÉQUATIONS. LES MINEURS D'ORDRE SUPÉRIEUR ET LE THÉORÈME DE M. VON KOCH.

23. Après ces préliminaires nous considérons le système d'équations

$$(10) \quad \begin{cases} (1+a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \ldots = c_1, \\ a_{21}x_1 + (1+a_{22})x_2 + \ldots = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

les x y représentent les inconnues, les a et les c sont des quantités données.

Nous supposons que $\sum_{i,k} |a_{ik}| = \Sigma A_k = A$ converge; et nous nous demandons si l'on peut satisfaire au système proposé par des quantités x_k, en exigeant de plus que ces quantités restent, en valeur absolue, inférieures à une borne finie. Remarquons que, dans ces conditions, les premiers membres des équations (10) seront des séries absolument convergentes.

Une condition nécessaire sera fournie par l'inégalité

$$|c_i| < |x_i| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}x_k| < (1+A) \times \text{borne sup. des } |x_k|.$$

Elle indique que les quantités $|c_i|$ doivent aussi rester inférieures à une certaine borne finie C. Supposons cette condition remplie.

Nous aurons à distinguer deux cas, selon que la valeur du déterminant du système s'annule ou ne s'annule pas.

Premier cas : $\Delta \neq 0$. — Dans ce cas et dans les conditions

posées, le système admet la solution

$$(11) \qquad x_1 = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta^{(2)}}{\Delta}, \qquad \ldots.$$

En effet, en appliquant les égalités (7), (9) et en remarquant que la série double (8) converge absolument, on a

$$\Delta^{(j)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\Delta^{(k)}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} c_j \binom{i}{j} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \sum_{i=1}^{\infty} c_i \binom{i}{k} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \left[\binom{i}{j} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \binom{i}{k} \right] = c_j \Delta;$$

c'est-à-dire que les quantités (11) satisfont au système (10). D'autre part, il résulte des inégalités

$$|\Delta^{(k)}| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} |c_i| \left| \binom{i}{k} \right| < CH$$

que ces quantités restent, en valeur absolue, inférieures à une borne finie.

La solution (11) est unique; d'une façon précise, le système (10) n'admet pas d'autre solution jouissant de même de la propriété exigée. En fait, dans le cas contraire, le système homogène

$$(12) \qquad \begin{cases} (1 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \ldots = 0, \\ a_{21}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

admettrait aussi une solution x_1, x_2, ... remplissant notre condition et telle que l'une au moins des quantités x_i ne s'annule pas. Or, les séries doubles qui suivent convergeant absolument, on a

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{i}{j} \left[x_i + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \left[\binom{k}{j} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \binom{i}{j} \right] = x_j \Delta$$

et par suite $x_j = 0$, quel que soit j.

Deuxième cas : $\Delta = 0$. — Le système homogène (12) admet la solution

$$(13) \qquad x_1 = \binom{i}{1}, \qquad x_2 = \binom{i}{2}, \qquad \ldots,$$

où i désigne un indice quelconque. C'est une conséquence immédiate des formules (9).

Supposons que les indices i et k soient choisis de telle façon que le mineur $\binom{i}{k} \neq 0$. Dans ce cas, la solution (13) diffère de la solution évidente $x_1 = x_2 = \ldots = 0$ et, de plus, elle est unique à un facteur près. En effet, supposons que le système admet la solution $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \ldots$ et remplaçons la $i^{\text{ième}}$ équation par

$$x_k = \xi_k.$$

Le déterminant du nouveau système est $\binom{i}{k} \neq 0$; donc, ce système rentre dans le premier cas que nous venons d'étudier. Par conséquent, il admet la solution uuique

$$x_1 = \frac{\binom{i}{1}}{\binom{i}{k}} \xi_k, \qquad x_2 = \frac{\binom{i}{2}}{\binom{i}{k}} \xi_k, \qquad \ldots.$$

24. Mais il peut arriver que tous les mineurs $\binom{i}{k}$ s'annulent. Pour discuter ce cas, il faut tout d'abord étendre la notion de mineur, en introduisant, avec M. von Koch, les mineurs $\binom{i_1, \ldots, i_r}{k_1, \ldots, k_r}$ d'ordre r. Nous entendons par là ce que devient Δ lorsqu'on y remplace les r éléments qui appartiennent à la fois à la ligne i_p et à la colonne k_p $(p = 1, \ldots, r)$ par 1 et les autres éléments de ces lignes (ou aussi des colonnes) par zéro. Notre règle générale de convergence s'applique aussi à ces nouveaux déterminants.

Démontrons d'abord le théorème de M. von Koch : *Il y a toujours un mineur de Δ d'ordre fini qui ne s'annule pas. En particulier, m désignant un nombre suffisamment grand, le mineur $\binom{1, \ldots, m}{1, \ldots, m}$ sera certainement différent de zéro.*

Supposons en effet m tel que

$$R_m = \sum_{i=m+1}^{\infty} A_i < \frac{1}{2}.$$

Cela posé, on a

$$\left|\binom{1, \ldots, m}{1, \ldots, m}\right| \geq 1 - \sum_{i=m+1}^{\infty} A_i - \sum_{\substack{i=m+1 \\ k=m+1}}^{\infty} A_i A_k - \ldots \geq 1 - R_m - R_m^2 - \ldots = \frac{1 - 2R_m}{1 - R_m} > 0.$$

23. D'après le théorème démontré, il existera, dans le cas considéré, un nombre r tel que Δ s'annule avec tous ses mineurs d'ordre $1, \ldots, r-1$, mais l'un au moins des mineurs d'ordre r est différent de zéro. Soit

$$\begin{pmatrix} i_1, & \ldots, & i_r \\ k_1, & \ldots, & k_r \end{pmatrix} \neq 0$$

un tel mineur. Remplaçons dans (12) les r équations qui correspondent aux indices $i_1, \ldots, i_r$ par

$$\begin{array}{ll} x_{k_1} & = \xi_{k_1}, \\ x_{k_2} & = \xi_{k_2}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ x_{k_r} & = \xi_{k_r}. \end{array}$$

Le déterminant du système ainsi modifié est $\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ k_1, \ldots, k_r \end{pmatrix} \neq 0$; donc le système rentre dans le premier cas et admet la solution unique

$$(14) \quad x_k = \frac{\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ k, \ldots, k_r \end{pmatrix} \xi_{k_1} - \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ k_1, \ldots, k_r \end{pmatrix} \xi_{k_2} - \ldots - \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ k_1, \ldots, k \end{pmatrix} \xi_{k_r}}{\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ k_1, \ldots, k_r \end{pmatrix}}.$$

Or, donnons aux indéterminées $\xi_{k_1}, \ldots, \xi_{k_r}$ des valeurs quelconques; les valeurs qui en résultent pour les x_k satisfont aux équations homogènes (12), sauf peut-être à celles qui correspondent aux indices $i_1, \ldots, i_r$ et qui étaient exclues pour le moment. Mais les mineurs $\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_{p-1}, i, i_{p+1}, \ldots, i_r \\ k_1, \ldots, k_{p-1}, k, k_{p+1}, \ldots, k_r \end{pmatrix}$, d'ordre r par rapport à Δ, étant en même temps des mineurs du premier ordre par rapport au déterminant $\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1}, \ldots, i_r \\ k_1, \ldots, k_{p-1}, k_{p+1}, \ldots, k_r \end{pmatrix}$, on a en vertu de (9)

$$\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i, \ldots, i_r \\ k_1, \ldots, i, \ldots, k_r \end{pmatrix} - \sum a_{ik} \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i, \ldots, i_r \\ k_1, \ldots, k, \ldots, k_r \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1}, \ldots, i_r \\ k_1, \ldots, k_{p-1}, k_{p+1}, \ldots, k_r \end{pmatrix} = 0,$$

où l'on a supposé $i \neq i_1, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1}, \ldots, i_r$ et où la sommation s'étend à tous les indices $k \neq k_1, \ldots, k_{p-1}, k_{p+1}, \ldots, k_r$. Or on pourra étendre la sommation à tous les k et la formule vaudra pour

tous les i, en convenant de poser, par définition,

$$\begin{pmatrix} i_1, & \ldots, & i_r \\ k_1, & \ldots, & k_r \end{pmatrix} = 0$$

dans les cas où deux indices i ou deux indices k se confondent. Alors posons dans notre formule successivement $k = k_1, \ldots, k_r$; en multipliant respectivement par $\xi_{k_1}, \ldots, \xi_{k_r}$ et en ajoutant terme à terme, il viendra, en vertu de (14),

$$x_i + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = 0,$$

et cela quel que soit i.

Donc le système homogène (12) admet les solutions (14) dépendant de r paramètres et n'en admet pas d'autres.

Considérons maintenant le système non homogène (10) et supposons qu'il admet la solution $x'_1, x'_2, \ldots$. Il est évident que l'on peut ajouter à cette solution une solution quelconque du système homogène (12). Ajoutons en particulier la solution qui correspond aux valeurs $\xi_{k_1} = -x'_{k_1}, \ldots, \xi_{k_r} = -x'_{k_r}$; la solution $x''_1, x''_2, \ldots$ du système (10) qui résulte sera de sorte que $x''_{k_1}, \ldots, x''_{k_r}$ s'annulent. C'est-à-dire, lorsque le système (10) admet des solutions, il y a entre elles une pour laquelle $x_{k_1} = \ldots = x_{k_r} = 0$, et toutes les autres solutions se déduisent de celle-ci en y ajoutant les solutions (14) du système homogène (12). Tout revient donc à ce qu'on puisse déterminer une solution (x_k) de (10) telle que $x_{k_1} = \ldots = x_{k_r} = 0$. Mais dans ce cas les autres inconnues satisfont au système qui résulte du système (10) en y supprimant les équations numérotées $i_1, \ldots, i_r$ et les inconnues $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$. Or le déterminant du système ainsi modifié est $\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ k_1, \ldots, k_r \end{pmatrix} \neq 0$; par conséquent, le système admet une solution et une seule. Pour que le système (10) puisse être résolu, il faut et il suffit que les valeurs $x_{k_1} = \ldots = x_{k_r} = 0$ et pour les autres k, les valeurs tirées du système modifié, satisfassent aux équations de rang $i_1, \ldots, i_r$. On en tire r relations entre les seconds membres des équations (10); ces relations expriment la condition nécessaire et suffisante pour que le système puisse être résolu.

On peut donner à cette condition plusieurs formes, analogues à

celles que l'on connaît dans le cas ordinaire des systèmes finis. Nous n'y insistons pas. Le fait essentiel qui résulte des considérations précédentes consiste en ce que la théorie classique des déterminants s'étend aux déterminants infinis normaux et aux systèmes d'équations qui y correspondent.

LES DÉTERMINANTS ABSOLUMENT CONVERGENTS.

26. En tàchant d'étendre les résultats précédents à des cas plus généraux, M. von Koch a bientôt observé qu'une modification très légère du raisonnement conduit à une extension considérable des résultats ([1]). En effet, l'expression majorante Π est beaucoup plus riche en termes que le déterminant Δ ; elle contient tous les produits des $|a_{ik}|$ dont les facteurs appartiennent à des colonnes distinctes. Le procédé de M. von Koch consiste à construire une expression majorante plus conforme à la structure des déterminants. Il prend comme point de départ la définition suivante :

Soit donné le tableau à double entrée (A_{ik}) et supposons que le produit P formé par tous les éléments diagonaux A_{ii} converge absolument (ce qui revient à supposer convergente la série $\Sigma|A_{ii}-1|$) et formons une suite de nouveaux produits P' en permutant dans P les seconds indices de toutes les manières possibles et en attribuant à chaque produit ainsi obtenu le signe $+$ ou le signe $-$, selon la parité ou l'imparité du nombre des transpositions nécessaires pour passer du produit initial P au produit considéré. Si la série Δ formée avec tous ces produits converge absolument, même si l'on remplace partout A_{ii} par $1+|A_{ii}-1|$, nous convenons de considérer Δ comme le déterminant des A_{ik} et de dire que le déterminant converge absolument.

27. Posons $a_{ii}=A_{ii}-1$ et $a_{ik}=A_{ik}$ pour $i \neq k$. En développant les produits P, P' suivant les produits des quantités a, l'hypothèse faite par M. von Koch revient évidemment à ce que la somme de tous ces produits converge absolument. Or, les termes

([1]) VON KOCH, *Sur la convergence des déterminants d'ordre infini* (*Bihang till K. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar*, t. XXII, 1896, n° 4, p. 1-31).

d'une somme absolument convergente pouvant être rangés d'une façon quelconque, on en conclut que Δ admet les développements

$$\Delta_1 + (\Delta_2 - \Delta_1) + (\Delta_3 - \Delta_2) + \ldots,$$

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ii} + \sum_{i,j=1}^{\infty} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} + \sum_{i,j,k=1}^{\infty} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} + \ldots.$$

De plus, quand le déterminant Δ converge absolument, il en sera de même quant à ses mineurs principaux $\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ i_1, \ldots, i_r \end{pmatrix}$. En effet, tous les produits des quantités a, dont se composent ces mineurs, entrent aussi dans le développement de Δ.

Ces mineurs principaux ne peuvent pas tous s'annuler. En effet, quand $m \to \infty$, la somme des produits des a, dont se compose $\begin{pmatrix} 1, \ldots, m \\ 1, \ldots, m \end{pmatrix}$, tend vers zéro, donc $\begin{pmatrix} 1, \ldots, m \\ 1, \ldots, m \end{pmatrix} \to 1$; par conséquent, pour m suffisamment grand, $\begin{pmatrix} 1, \ldots, m \\ 1, \ldots, m \end{pmatrix} \neq 0$.

Il convient d'observer que, pour les mineurs non principaux, la convergence absolue du déterminant Δ n'entraîne pas toujours celle de ses mineurs. Mais, dans le cas où aucune des quantités $a_{ik} (i \neq k)$ ne s'annule pas, la convergence absolue de tous les mineurs suit immédiatement de celle de Δ lui-même.

Supposons en particulier que le déterminant Δ et pour un certain indice k, les mineurs $\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}$ convergent absolument. Dans cette hypothèse, en rangeant les termes d'une façon convenable, on obtiendra la règle de Laplace :

$$\Delta = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}.$$

En utilisant ces résultats, le lecteur se rendra aisément compte de ce que la méthode des déterminants s'applique aux systèmes infinis d'équations linéaires dans tous les cas où les déterminants qui entrent dans le calcul et leurs mineurs convergent absolument.

28. M. von Koch a donné une condition nécessaire et suffisante de ce que le déterminant Δ converge absolument. Considérons les

produits circulaires des quantités a_{ik}; nous entendons par produit circulaire d'ordre r tout produit de la forme $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_{r-1} i_r} a_{i_r i_1}$, les indices $i_1, \ldots, i_r$ étant supposés être distincts. Par produit circulaire du premier ordre nous entendons les quantités a_{ii}. Tous les produits circulaires figurant dans le développement de Δ, on en conclut que pour que Δ converge absolument il faut que la série formée avec tous les produits circulaires converge absolument. Mais cette condition nécessaire est aussi suffisante. En fait, formons le produit infini $\Pi(1 + |p|)$, étendu à tous les produits circulaires p. Le développement de ce produit contient, en valeur absolue, tous les termes du développement de Δ. Lorsque $\Sigma|p|$ converge, $\Pi(1 + |p|)$ convergera aussi. Par conséquent, lorsque $\Sigma|p|$ converge, le déterminant Δ sera absolument convergent.

Pour que le déterminant infini Δ converge absolument, il faut et il suffit que la série formée avec les produits circulaires des quantités a_{ik} converge absolument.

29. Il est presque évident que les déterminants normaux convergent absolument, ainsi que les autres qui en résultent, en remplaçant les éléments d'une colonne par des quantités bornées dans leur ensemble. En effet, quant aux déterminants normaux, le produit infini $\Pi(1 + |a_{ik}|)$ étendu à tous les i et à tous les k est convergent, et le développement de ce produit contient, en valeur absolue, tous les produits circulaires. Pour les déterminants du second type, une telle expression majorante résulte en ajoutant le facteur $1 + C$ et en supprimant, d'autre part, les facteurs qui correspondent à l'indice k. Les mineurs appartiennent au même type, donc ils convergent aussi absolument.

En cherchant des règles plus générales, M. von Koch a formé une suite de critères de plus en plus précis de ce que le déterminant Δ et tous ses mineurs convergent absolument. Nous nous bornerons ici à exposer un des plus simples qui est d'ailleurs important pour ses applications aux équations intégrales.

Pour que le déterminant Δ et tous ses mineurs convergent

---

(1) Von Koch, *Sur la convergence des déterminants infinis* (*Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. XXVIII, 1909, p. 255-266).

absolument, il suffit que les deux séries

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ii}|, \qquad \sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2$$

convergent.

Observons que les mineurs appartiennent au même type que Δ, donc nous pouvons nous borner à démontrer que Δ converge absolument. D'après le théorème que nous venons d'établir, tout revient à démontrer que la somme des modules des produits circulaires converge. Quant à ceux du premier ordre, nous l'avons supposé explicitement; nous n'aurons à envisager dans la suite que ceux d'ordre > 1.

Nous suivrons la marche de la démonstration de M. von Koch. Posons

$$\sigma^2 = \left(\sum_{i} |a_{ik}|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

la sommation s'étendant à tous les entiers $i, k = 1, 2, \ldots$, sauf les combinaisons $i = k$. Désignons par $|i_1, i_2, \ldots, i_r|$ la valeur absolue du produit circulaire $a_{i_1 i_2}, a_{i_2 i_3}, \ldots, a_{i_r i_1}$ et par $|i_1, i_2, \ldots, i_r; i_{r+1}|$ celle du produit $a_{i_1 i_2}, a_{i_2 i_3}, \ldots, a_{i_r i_{r+1}}$; nous y supposons les indices $i_1, i_2, \ldots$ d'être distincts; chaque fois que cette condition n'est pas remplie, nous posons, par définition,

$$|i_1, i_2, \ldots, i_r| = 0, \qquad |i_1, i_2, \ldots, i_r; i_{r+1}| = 0.$$

Dans les calculs qui suivent, nous nous servirons de l'inégalité bien connue de Lagrange-Cauchy ([1]) :

$$(15) \qquad \left|\sum_i a_i b_i\right|^2 \leqq \left(\sum_i |a_i b_i|\right)^2 \leqq \sum_i |a_i|^2 \sum_i |b_i|^2,$$

portant sur des nombres quelconques. Elle découle de l'identité de Lagrange :

$$\sum_i |a_i|^2 \sum_i |b_i|^2 = \left(\sum_i |a_i b_i|\right)^2 - \sum_{i,k;\ i<k} (|a_i b_k| - |a_k b_i|)^2.$$

([1]) Cauchy, *Cours d'Analyse de l'École royale Polytechnique*, Paris, 1824, Note II; *Œuvres*, 1re série, t. III.

La sommation peut être étendue à une infinité de termes; il faut supposer seulement que les deux séries qui figurent dans le dernier membre de l'inégalité (15) convergent; la convergence absolue des autres séries en résulte immédiatement.

Après ces préliminaires, considérons d'abord le cas $\sigma < 1$.

On a, d'après (15),

$$\left(\sum_j |i, j : k|\right)^2 \leq \sum_j |i, j|^2 \sum_j |j, k|^2,$$

ce qui donne, pour $i = k$,

$$\sum_{i,j} |i, j|^2 \leq \sigma^2,$$

et, d'autre part, pour ι quelconque,

$$\sum_k \left(\sum_j |i, j : k|\right)^2 \leq \sigma^2 \sum_j |i, j|^2.$$

Donc, les inégalités

$$(16) \qquad \sum_{i_1, \ldots, i_n} |i_1, i_2, \ldots, i_n|^2 \leq \sigma^n$$

et

$$(17) \qquad \sum_j \left(\sum_{i_2, \ldots, i_n} |i_1, i_2, \ldots, i_n : j|\right)^2 \leq \sigma^{2n-2} \sum_j |i_1, j|^2$$

sont vraies pour $n = 2$. Supposons qu'elles soient vraies pour une valeur déterminée de n et montrons qu'elles subsistent pour $n + 1$.

On a

$$\sum_{i_1, \ldots, i_{n+1}} |i_1, \ldots, i_{n+1}| = \sum_{i_1} \sum_{i_{n+1}} \left(|i_{n+1}, i_1| \sum_{i_2, \ldots, i_n} |i_1, \ldots, i_n : i_{n+1}|\right)$$

$$\leq \sum_{i_1} \left[\sum_{i_{n+1}} |i_{n+1}, i_1|^2 \sum_{i_{n+1}} \left(\sum_{i_2, \ldots, i_n} |i_1, \ldots, i_n : i_{n+1}|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i_1, i_{n+1}} |i_{n+1}, i_1|^2 \sigma^{2n-2} \sum_{i_1, i_{n+1}} |i_1, i_{n+1}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma^{n+1}$$

et

$$\sum_{j}\Big(\sum_{i_2,\ldots,i_{n+1}} |i_1,\ldots,i_{n+1};j|\Big)^2$$
$$=\sum_{j}\Big[\sum_{i_2}\Big(|i_1,i_2|\sum_{i_3,\ldots,i_{n+1}}|i_2,\ldots,i_{n+1};j|\Big)\Big]^2$$
$$\leqq \sum_{i_2}|i_1,i_2|^2\sum_{j,i_2}\Big(\sum_{i_3,\ldots,i_n}|i_2,\ldots,i_{n+1};j|\Big)^2$$
$$\leqq \sum_{i_2}|i_1,i_2|^2\,\sigma^{2n-2}\sum_{i_2,j}|i_2,j|^2=\sigma^{2n}\sum_{k}|i_1,k|^2.$$

C'est-à-dire que les inégalités (16), (17) étant supposées vraies pour n, elles subsistent pour $n+1$. Mais elles sont vraies pour $n=2$; par suite, elles le restent pour n quelconque.

D'après (16), la somme des modules de tous les produits circulaires d'ordre >1 reste inférieure à la somme de la série convergente

$$\sigma^2+\sigma^3+\ldots=\frac{\sigma^2}{1-\sigma};$$

par conséquent, le déterminant Δ converge absolument.

Dans ce qui précède, nous avons supposé $\sigma<1$. Je dis que le cas général se ramène à ce cas particulier. En fait, quand $\sum_{i,k}|a_{ik}|^2$ converge, on peut choisir m de sorte que

$$\sum_{i=m+1,\,k=1}^{\infty}|a_{ik}|^2<\frac{1}{2};$$

le nombre m étant déterminé de cette façon, on choisira une quantité positive t suffisamment petite pour que

$$t^2\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^2<\frac{1}{2}.$$

(1) *Cf.* outre le Mémoire de M. von Koch, la thèse hongroise de M. Szász : *A végtelen determinánsok elméletéhez*, Budapest, 1911, où ces systèmes et les déterminants qui y correspondent sont étudiés indépendamment de la théorie générale des déterminants absolument convergents.

Multiplions par t les éléments des m premières lignes de Δ; il résulte immédiatement de la définition donnée au n° 26 que le déterminant Δ converge ou ne converge pas absolument en même temps que le déterminant modifié. Mais, pour ce dernier, on a $\sigma < 1$; donc il converge absolument. Par conséquent, le déterminant Δ converge aussi absolument.

30. Les considérations précédentes font voir que l'on peut étendre les résultats obtenus portant sur les systèmes (10) et (12) en imposant aux inconnues x_k et aux données a_{ik}, c_i les conditions que les séries $\sum_k |x_k|^2$, $\sum_i |a_{ii}|$, $\sum_{i,k} |a_{ik}|^2$ et $\sum_i |c_i|^2$ convergent. L'application la plus importante de tels systèmes est celle aux équations intégrales. Nous en parlerons plus tard et nous verrons que les conditions imposées maintenant se présenteront d'une façon bien naturelle, sauf la convergence de $\sum |a_{ii}|$. Observons que l'on peut se débarrasser de cette dernière condition en multipliant les équations du système par des facteurs convenables. En fait, supposons que les séries $\sum_i |c_i|^2$, $\sum_{i,k} |a_{ik}|^2$ et alors en particulier la série $\sum_i |a_{ii}|^2$ convergent; en appliquant l'inégalité $|e^{-a}(1+a) - 1| = \left| -\frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{1.3} - \frac{a^4}{1.2.4} + \ldots \right| < \frac{|a|^2}{2} e^{|a|}$ et en remarquant que $a_{ii} \to 0$, on en conclut immédiatement la convergence des séries $\sum_i |e^{-a_{ii}} c_i|^2$, $\sum_{i,k} |e^{-a_{ii}} a_{ik}|^2$ et $\sum_i |e^{-a_{ii}}(1 + a_{ii}) - 1|$. Par conséquent, si l'on multiplie chacune des équations par la quantité correspondante $e^{-a_{ii}}$, le système modifié sera du type déjà considéré.

31. Enfin, supposons que les données a_{ik} soient des fonctions $a_{ik}(\lambda)$ d'un paramètre λ, holomorphes dans un domaine D et supposons de plus que les conditions y imposées soient, par rapport à λ, uniformément remplies. Par exemple, quand il s'agit des déterminants normaux, nous supposons que $\sum_{i,k} |a_{ik}(\lambda)|$ converge uniformément. Cela posé, les développements donnés pour Δ con-

vergent uniformément et la fonction $\Delta(\lambda)$ ainsi définie est *holomorphe* en λ.

Lorsque λ n'est pas racine de $\Delta(\lambda)$, le système d'équations formé avec les $a_{ik}(\lambda)$ admet une solution bien déterminée $x_k(\lambda) = \dfrac{\Delta^{k}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$. Envisagée en fonction de λ, $x_k(\lambda)$ est méromorphe dans l'intérieur du domaine considéré et ses pôles sont racines de $\Delta(\lambda)$.

En développant le déterminant $\Delta(\lambda)$ en série procédant suivant les produits des fonctions $a_{ik}(\lambda)$, cette série converge absolument et uniformément et l'on peut appliquer à l'étude de la fonction $\Delta(\lambda)$ les règles générales concernant les séries de fonctions analytiques. En particulier, on peut calculer les dérivées successives de $\Delta(\lambda)$ par rapport à λ et il est facile de préciser les conditions pour que ces dérivées puissent être mises sous la même forme que pour les déterminants d'ordre fini. Supposons par exemple que la série $\sum\limits_{i,k} |a_{ik}(\lambda)|$ converge uniformément dans le domaine D; donc le développement de $\Delta(\lambda)$ y converge absolument et uniformément et on en obtient la dérivée $\dfrac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda}$ en différentiant terme à terme. D'autre part, la série $\sum\limits_{i,k} \left|\dfrac{da_{ik}(\lambda)}{d\lambda}\right|$ étant aussi convergente et les mineurs du premier ordre du déterminant $\Delta(\lambda)$ restant bornés dans leur ensemble, la série

$$(18) \qquad \sum_{i,k} \binom{i}{k} \frac{da_{ik}}{d\lambda}$$

converge absolument. Or, on peut aussi développer les mineurs suivant les produits des fonctions $a_{ik}(\lambda)$, et même si l'on remplace chaque terme par sa valeur absolue, les mineurs ainsi modifiés restent bornés dans leur ensemble. Donc en développant (18) suivant les produits des fonctions $a_{ik}(\lambda)$, $\dfrac{da_{ik}(\lambda)}{d\lambda}$, la série obtenue converge absolument; par suite on y peut ranger les termes d'une façon arbitraire, on peut les ranger, entre autres, de sorte qu'on obtienne la série qui résulte en différentiant terme à terme le développement de $\Delta(\lambda)$. Par conséquent, la série (18) repré-

sente $\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda}$. Enfin, en posant $A_{ik}(\lambda) = 1 + a_{ik}(\lambda)$ ou $a_{ik}(\lambda)$ suivant que $i = k$ ou $i \gtrless k$, on a $\frac{dA_{ik}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{da_{ik}(\lambda)}{d\lambda}$; alors, en remplaçant dans (18) les $\frac{da_{ik}}{d\lambda}$ par $\frac{dA_{ik}}{d\lambda}$, l'expression obtenue pour $\frac{d\Delta}{d\lambda}$ aura la forme habituelle.

CHAPITRE III.

ESSAI D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE.

INTRODUCTION.

32. Pour appliquer la méthode classique des déterminants aux systèmes infinis, il fallait imposer aux données des conditions plus ou moins restrictives, et il faut avouer que c'est la méthode et non le problème qui exigeait ces restrictions. Dans ce qui suit, nous nous placerons à un point de vue beaucoup plus général, dû en principe à M. E. Schmidt [1]. Nous commencerons par préciser la nature des solutions admises (x_k) et, quant aux données, nous ferons la seule hypothèse que pour tout système admis (x_k), les séries figurant au premier membre des équations doivent être convergentes. La question principale sera celle de l'*existence* des solutions; il s'agira seulement en second lieu de l'appareil qui les fournit.

Le cas le plus important au point de vue des applications est celui où l'on exige que $\sum_k |x_k|^2$ converge. Pour le traiter par la méthode des déterminants, il nous fallait supposer convergentes la série double $\sum_{i,k} |a_{ik}|^2$ et la série $\sum_i |c_i|^2$. Comme nous allons voir, la théorie de M. Schmidt ne suppose que la convergence des séries simplement infinies $\sum_k |a_{ik}|^2$. Une théorie intermédiaire fut basée par M. Hilbert sur l'étude des formes quadratiques et des formes

---

(1) SCHMIDT, *Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit abzählbar unendlich vielen Unbekannten* (*Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, t. XXV, 1908, p. 53-77).

bilinéaires à une infinité de variables [1]; elle est beaucoup plus efficace que la méthode des déterminants, mais elle est moins générale que celle de M. Schmidt. Quant à l'ordre historique, il convient d'observer que la théorie de M. Hilbert est antérieure à celle de M. Schmidt, elle l'est aussi à l'étude des déterminants tels que $\sum_{i,k} |a_{ik}|^2$ converge, mais elle est postérieure à la théorie générale des déterminants infinis et absolument convergents.

Les Chapitres IV et V sont consacrés à la théorie de M. Hilbert. Dans le présent Chapitre, nous allons exposer, sous une forme légèrement généralisée, la théorie de M. Schmidt.

LES INÉGALITÉS FONDAMENTALES.

33. Nous aurons à partir de l'inégalité

$$(1)\qquad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p > 1),$$

portant sur des quantités a_k, b_k quelconques, réelles ou non. Établie et utilisée déjà par Cauchy pour $p = 2$ [2], elle fut étendue par M. Hölder à tous les $p > 1$ [3].

Il suffit de démontrer l'inégalité (1) pour des quantités a_k, b_k positives; elle subsistera, à plus forte raison, pour des a et b quelconques. On peut aussi supposer les a et b essentiellement positives, en considérant comme des cas limites les cas où l'une ou l'autre de ces quantités s'annulent. Enfin, on peut supposer $n = 2$, car, ayant démontré l'inégalité pour ce cas particulier, on l'étend

---

(1) HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, 4. Mitteilung (*Nachrichten d. k. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen*, 1906, p. 157-227).

Les six Mémoires de M. Hilbert sur les équations intégrales viennent d'être réunis dans un Volume (Leipzig, 1912).

Cf. encore HILBERT, *Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variabeln* (*Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. XXVII, 1909, p. 59-74).

(2) *Cf.* n° 29.

(3) HÖLDER, *Ueber einen Mittelwertsatz* (*Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen*, 1889, p. 38-47).

à tous les n en raisonnant par récurrence. Donc il nous reste à démontrer l'inégalité

$$(2)\qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 - \left(a_1^{\frac{p}{p-1}} + a_2^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} (b_1^p + b_2^p)^{\frac{1}{p}} \leqq 0,$$

les quantités a_1, b_1, a_2, b_2 étant supposées essentiellement positives.

La démonstration se fera aisément à l'aide des méthodes usuelles du Calcul différentiel; en laissant fixe les quantités a_1, a_2, b_1, on fait varier b_2; la dérivée de l'expression au premier membre, par rapport à b_2, ne s'annule que lorsque

$$(3)\qquad b_2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{p-1}} b_1;$$

elle est positive pour toute valeur plus petite de b_2 et négative pour toute valeur plus grande. Par suite, la valeur envisagée de b_2 rend maximum la valeur de notre expression; en substituant, on reconnaît que cette valeur maximum égale o. L'inégalité (2) est donc vraie; de plus, le signe $=$ ne vaut que dans le cas (3).

Pour le cas où les quantités a_k, b_k sont positives, M. Jensen a donné une interprétation géométrique très intéressante de l'inégalité (1). Il envisage la courbe $y = x^p (x > 0)$; cette courbe est convexe, c'est-à-dire que les cordes sont situées au-dessus de la courbe. Soient $P_1, \ldots, P_n$ les points de cette courbe ayant pour abscisses $a_1^{\frac{1}{1-p}} b_1, \ldots, a_n^{\frac{1}{1-p}} b_n$. Affectons ces points des masses positives $a_1^{\frac{p}{p-1}}, \ldots, a_n^{\frac{p}{p-1}}$. Cela posé, l'inégalité (1) exprime le fait que le centre de gravité du système est situé au-dessus de la courbe; le signe $=$ ne conviendra que si les points P coïncident [1].

L'inégalité (1) s'étend immédiatement aux séries infinies. En effet, supposons que les deux séries $A = \Sigma |a_k|^{\frac{p}{p-1}}$, $B = \Sigma |b_k|^p$ convergent; cela posé, les sommes partielles de la série $\Sigma |a_k b_k|$ ne surpasseront pas, en vertu de (1), la borne $A^{\frac{p-1}{p}} B^{\frac{1}{p}}$. Par

[1] JENSEN, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes* (*Acta mathematica*, t. XXX, 1906, p. 175-193).

conséquent, la série $\Sigma a_k b_k$ converge absolument et l'on a

$$(4)\qquad \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p>1).$$

34. Nous aurons encore à nous servir de l'inégalité

$$(5)\qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p>1).$$

On l'obtient par une analyse tout analogue à ce qui précède; mais elle suit aussi immédiatement de l'inégalité (4). Nous nous contentons d'exposer le cas où il s'agit de quatre quantités positives a_1, a_2, b_1, b_2, car on passe de ce cas particulier au cas général en raisonnant tout comme plus haut [1].

En appliquant (2), écrivons

$$(6)\quad (a_1+b_1)^p + (a_2+b_2)^p$$
$$= (a_1+b_1)^{p-1}a_1 + (a_2+b_2)^{p-1}a_2 + (a_1+b_1)^{p-1}b_1 + (a_2+b_2)^{p-1}b_2$$
$$\leq [(a_1+b_1)^p + (a_2+b_2)^p]^{\frac{p-1}{p}}(a_1^p+a_2^p)^{\frac{1}{p}} + [(a_1+b_1)^p + (a_2+b_2)^p]^{\frac{p-1}{p}}(b_1^p+b_2^p)^{\frac{1}{p}};$$

le signe = ne convient que si

$$a_2 = \frac{a_2+b_2}{a_1+b_1}a_1, \qquad b_2 = \frac{a_2+b_2}{a_1+b_1}b_1,$$

c'est-à-dire si $a_1 b_2 = a_2 b_1$.

---

[1] Pour un nombre fini de termes, l'inégalité (5) fut établie par Minkovski : *Diophantische Approximationen*, 1907, p. 95. Il s'agit dans cet Ouvrage de la théorie importante que son auteur appelle *Géométrie des nombres*. Dans l'ordre d'idée de cette théorie, l'inégalité (5) sert à exprimer la convexité du domaine à n dimensions

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \leq 1.$$

Remarquons que, dans les raisonnements qui suivent, l'inégalité (5) pourrait être remplacée, pour la plupart des cas, par l'inégalité à peu près évidente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k+b_k|^p \leq 2^p \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p + 2^p \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p.$$

En divisant par $\left[(a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$, on obtient l'inégalité à démontrer :

$$\left[(a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq (a_1^p+a_2^p)^{\frac{1}{p}}+(b_1^p+b_2^p)^{\frac{1}{p}};$$

le signe $=$ n'a lieu que dans le cas précité.

Voilà une seconde forme de notre inégalité, que l'on obtient en y remplaçant a_k par a_k+b_k :

$$(7) \qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Précisons encore les conditions pour que le signe $=$ convienne dans (5). Pour cela, il faut et il suffit que les b soient proportionnels aux a :

$$a_1:b_1=a_2:b_2=\ldots,$$

et que ces rapports soient positifs.

Ces conditions sont évidemment suffisantes. Montrons qu'elles sont aussi nécessaires. Quand la seconde condition n'est pas remplie, on peut augmenter la valeur des termes $|a_k+b_k|^p$ sans modifier la valeur absolue des a et b. Donc cette condition doit être remplie, et quand elle est remplie, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que les a et b soient positifs. Mais, dans ce cas, le signe $=$ ne peut servir que quand les b sont proportionnels aux a. En effet, supposons, pour fixer les idées, $a_1:b_1\neq a_2:b_2$, c'est-à-dire $a_1 b_2\neq a_2 b_1$. Nous venons de voir que, dans ce cas, c'est le signe $<$ qui convient dans (6); donc, on peut augmenter la valeur de

$$(a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p$$

sans modifier celle de $a_1^p+a_2^p$ ou celle de $b_1^p+b_2^p$. Alors on aura augmenté le premier membre de (5) sans modifier le second; par conséquent, dans le cas posé, le signe $=$ sera exclu.

LE PROBLÈME. THÉORÈME DE M. LANDAU.

35. Considérons le système formé d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'équations

$$(8) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k=c_i \qquad (i=1,2,\ldots).$$

Étant donné un nombre $p > 1$, choisi arbitrairement une fois pour toutes, on se propose de déterminer une solution (x_k) du système, et cela de sorte que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \tag{9}$$

converge.

Quant aux données, nous ne faisons qu'une seule hypothèse. Il faut que moyennant cette hypothèse, les équations (8) aient un sens. Mais avant d'avoir effectué la résolution, nous ne savons rien sur les quantités x_k. Nous sommes donc amenés à supposer que les premiers membres de (8) convergent pour tout système (x_k) tel que (9) existe. Cela revient à supposer que, pour tous les i, les sommes

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^{\frac{p}{p-1}}$$

convergent. En effet, MM. Hellinger et Tœplitz ont démontré pour $p = 2$ [1], et M. Landau pour p quelconque > 1 [2], que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \tag{10}$$

ne peut converger pour tous les systèmes (x_k) tels que (9) existe, sans que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\frac{p}{p-1}} \tag{11}$$

converge. D'autre part, quand cette dernière condition est remplie, l'inégalité (1) permet d'affirmer la convergence absolue des séries (10).

Il reste à démontrer le théorème de M. Landau : *Lorsque la série* (10) *converge pour tous les systèmes* (x_k) *tels que* (9) *existe, la série* (11) *converge.* Supposons que cette dernière série soit divergente; nous allons définir un système (x_k) tel que (9)

[1] HELLINGER u. TŒPLITZ, *Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen* (*Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen*, 1906, p. 351-355).

[2] LANDAU, *Ueber einen Konvergenzsatz* (*Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen* 1907, p. 25-27).

converge et que (10) diverge. Posons

$$s_0 = 0, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{p}{p-1}};$$

on a $s_n \to \infty$. Partageons la suite des indices 0, 1, 2, ... en des groupes 0; 1, 2, ..., n_1; $n_1 + 1$, ..., n_2; ..., de sorte que

$$s_{n_\nu} - s_{n_{\nu-1}} \geq 2^{\frac{\nu}{p-1}}.$$

L'indice k appartenant au groupe qui finit par n_ν, posons

$$x_k = \frac{|a_k|^{\frac{1}{p-1}} \, \overline{\text{signe}\, a_k}}{s_{n_\nu} - s_{n_{\nu-1}}} \quad (^1);$$

il en résulte

$$\sum_{k=1}^{n_\nu} a_k x_k = \nu,$$

et la série (10) diverge. Par contre,

$$\sum_{k=1}^{n_\nu} |x_k|^p = \sum_{\mu=1}^{\nu} (s_{n_\mu} - s_{n_{\mu-1}})^{1-p} \leq \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{2^\mu};$$

par conséquent la série (9) converge.

UNE CONDITION NÉCESSAIRE.

36. Supposons que le système (8) admette une solution telle que

$$(12) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \leq M^p.$$

Soient $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des nombres quelconques, réels ou non. Les valeurs (x_k) satisfont aussi à l'équation

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i a_{ik} \right) x_k = \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i,$$

qui n'est qu'une combinaison linéaire des n premières des équa-

(1) Pour la notation $\overline{\text{signe}}$, *cf.* la remarque faite au n° 21.

tions (8). En appliquant l'inégalité (4), il vient

$$(13)\qquad \left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i c_i\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{ik}\right)x_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{ik}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

on en tire, d'après (12),

$$(14)\qquad \left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i c_i\right| \leq M\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{ik}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Ainsi, nous avons établi une condition nécessaire pour que le système (8) admette une solution telle que (12). Elle consiste en ce que l'inégalité (14) ait lieu quels que soient n et les nombres réels ou non μ_i. (Dans le cas où les équations (8) sont en nombre fini, on peut supposer n fixe et égal au nombre des équations.)

Nous allons voir que cette condition est aussi suffisante.

LA CONDITION EST AUSSI SUFFISANTE. CAS OÙ IL Y A UN NOMBRE FINI D'ÉQUATIONS.

37. Considérons d'abord le cas particulier d'un nombre fini d'équations

$$(15)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Supposons la condition remplie.

Posons

$$A_k(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{ik}, \qquad A(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_{k=1}^{\infty}|A_k(\mu_1, \ldots, \mu_n)|^{\frac{p}{p-1}},$$

$$C(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i c_i\right|^{\frac{p}{p-1}}.$$

$C(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ est une fonction continue des n variables $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Elle l'est aussi en fonction des $2n$ variables réelles

$$\mu'_1, \mu''_1, \ldots, \mu'_n, \mu''_n \quad (\mu_i = \mu'_i + \mu''_i\sqrt{-1}).$$

De plus, elle admet par rapport à ces $2n$ variables des dérivées continues du premier ordre. Pour simplifier le calcul, nous ne considérons que les combinaisons $\frac{\partial C}{\partial \mu'_i} + \frac{\partial C}{\partial \mu''_i}\sqrt{-1}$ de ces dérivées. On a

$$(16) \qquad \frac{\partial C}{\partial \mu'_i} + \frac{\partial C}{\partial \mu''_i}\sqrt{-1} = \frac{p}{p-1}\, c_i\, C^{\frac{1}{p-1}}\, \overline{\text{signe} \sum_{j=1}^{n} \mu_j c_j}.$$

On a de même

$$(17) \qquad \frac{\partial |A_k|^{\frac{p}{p-1}}}{\partial \mu'_i} + \frac{\partial |A_k|^{\frac{p}{p-1}}}{\partial \mu''_i}\sqrt{-1} = \frac{p}{p-1}\, a_{ik}\, |A_k|^{\frac{1}{p-1}}\, \overline{\text{signe}\, A_k}.$$

Quant à la fonction $A(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, remarquons d'abord que la série qui la définit converge pour tout système des valeurs $\mu_1, \ldots, \mu_n$. On prouve ce fait en appliquant successivement aux suites $(\mu_1 a_{1k}), \ldots, (\mu_n a_{nk})$ l'inégalité (5); l'exposant p doit y être remplacé par $\frac{p}{p-1}$, ce qui est permis, car $\frac{p}{p-1} > 1$. De plus, la même inégalité prouve que la série qui définit $A(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ converge uniformément pour tout domaine fini des μ; par suite, $A(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ est une fonction continue des variables μ', μ''.

Différentions terme à terme la série qui définit $A(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ par rapport à la variable μ'_i (ou μ''_i); le $k^{\text{ième}}$ terme de la série obtenue ne surpassera pas, en valeur absolue, le second membre de (17). Par conséquent, la série

$$\frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|\,|A_k|^{\frac{1}{p-1}} \leq \frac{p}{p-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{p}{p-1}\, |A(\mu_1, \ldots, \mu_n)|^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

est une majorante pour la série dérivée; et comme la série majorante converge uniformément pour tout domaine fini des μ, il en sera de même pour la série dérivée. Il s'ensuit, en vertu d'un théorème bien connu concernant la différentiation des séries, que la

fonction $A(\mu_1, \dots, \mu_n)$ admet des dérivées partielles continues, obtenues en différentiant terme à terme. On en conclut que

$$(18)\qquad \frac{\partial A}{\partial \mu'_i} - \frac{\partial A}{\partial \mu''_i}\sqrt{-1} = \frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ki}\,|A_k|^{\frac{1}{p-1}}\,\overline{\text{signe}\,A_k}.$$

38. Ces préliminaires établis, supposons encore, pour le moment, que les premiers membres des équations (15) soient indépendants; cette hypothèse peut être formulée en exigeant que $A(\mu_1, \dots, \mu_n)$ ne s'annule pas sans que tous les μ s'annulent. La restriction ainsi posée n'est pas essentielle; nous nous en débarrasserons à la fin du raisonnement. Pour le moment, elle nous sert à conclure que, pour A bornée, les quantités μ restent aussi bornées. En effet, au cas contraire, il existerait une suite infinie de systèmes (μ_i), de sorte que, pour l'un au moins des indices i, les valeurs (μ_i) croîtraient au delà de toute limite et que, d'autre part, la fonction A resterait bornée. L'homogénéité de la fonction A permettrait d'en déduire une suite de systèmes (μ_i) tels que, pour chaque système, la plus grande des valeurs $|\mu_i|$ serait précisément 1, et que les valeurs de A, qui correspondent à la suite, tendent vers zéro. Or, d'après Weierstrass, une telle suite contient une suite partielle qui converge vers un système déterminé $(\mu_i^{(0)})$. Les valeurs $\mu_i^{(0)}$ ne s'annulent pas simultanément, la plus grande des $|\mu_i^{(0)}|$ étant précisément 1. D'autre part, A étant continue, il faudrait avoir $A(\mu_1^{(0)}, \dots, \mu_n^{(0)}) = 0$, contrairement à l'hypothèse faite.

A et C sont des fonctions continues des μ, et pour A bornée, les μ restent bornés; donc la fonction C le reste aussi. Par conséquent, en faisant varier la fonction C sous la condition $A = 1$, elle atteindra son maximum pour certaines valeurs $\mu_1, \dots, \mu_n$. Le procédé classique du Calcul différentiel fournit pour ces valeurs μ les équations

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &c_i[C(\mu_1, \dots, \mu_n)]^{\frac{1}{p}}\,\overline{\text{signe}\sum_{j=1}^{n}\mu_j c_j} \\ &\quad = \lambda\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,|A_k(\mu_1, \dots, \mu_n)|^{\frac{1}{p-1}}\,\overline{\text{signe}\,A_k(\mu_1, \dots, \mu_n)} \end{aligned}\right.$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(20)\qquad A(\mu_1, \dots, \mu_n) = 1.$$

En multipliant les équations (19) par μ_i et en ajoutant, il vient

$$\lambda = C(\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Par conséquent, on a pour les valeurs envisagées des μ

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j c_j \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} |A_k(\mu_1, \ldots, \mu_n)|^{\frac{1}{p-1}} \overline{\text{signe}}\, A_k(\mu_1, \ldots, \mu_n) = c_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Or, c'est précisément la solution du système (15) que nous venons d'obtenir. En effet, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ étant les valeurs extrémales envisagées, posons

$$(21)\quad x_k^{(n)} = |A_k(\mu_1, \ldots, \mu_n)|^{\frac{1}{p-1}} \overline{\text{signe}}\, A_k(\mu_1, \ldots, \mu_n) \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i \quad (k = 1, 2, \ldots);$$

les quantités $x_k^{(n)}$ ainsi définies satisfont aux équations (15).

De plus, il résulte de (14), (20) et (21)

$$(22)\quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^p = \left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i \right|^p \leqq M^p,$$

c'est-à-dire que sous les conditions posées, le système (15) admet une solution telle que (12).

L'inégalité (22) peut être remplacée par une relation plus précise. En effet, soit $M^{(n)}$ le plus petit des nombres M remplissant l'inégalité (14) pour tout choix des quantités $\mu_1, \ldots, \mu_n$; donc $[M^{(n)}]^{\frac{p}{p-1}}$ sera la valeur maximée de la fonction $C(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, variant sous la condition (20). Ce maximum sera atteint pour les valeurs envisagées des μ, qui ont fourni la solution $(x_k^{(n)})$. Par suite, on a

$$(23)\quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^p = \left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i \right|^p = M^{(n)p}.$$

D'autre part, d'après l'inégalité (13), toute solution (x_k) du système (15) satisfait à l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \geqq \left[\frac{C(\mu_1, \ldots, \mu_n)}{A(\mu_1, \ldots, \mu_n)} \right]^{\frac{1}{p-1}} = M^{(n)p}.$$

Donc, la solution trouvée $(x_k^{(n)})$ jouit encore d'une seconde propriété *extrémale*; parmi toutes les solutions du système (15), c'est pour elle que la somme $\Sigma |x_k|^p$ devient la plus petite possible.

Je dis que $(x_k^{(n)})$ est la seule solution jouissant de la propriété que nous venons d'observer. En effet, soit (x_k) une telle solution; l'inégalité (5) donne

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x_k^{(n)}-x_k}{2}\right|^p \leq \left[\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p = M^{(n)};$$

et comme $\left(\frac{x_k^{(n)}-x_k}{2}\right)$ satisfait aussi au système (15), il ne peut valoir que le signe $=$. Or, dans le n° 34, en discutant l'inégalité (5), nous avons aussi précisé les conditions d'égalité; appliquons au cas présent les critères y trouvés. Il faut que

$$x_1^{(n)} : x_1 = x_2^{(n)} : x_2 = \ldots,$$

et que ces rapports soient positifs. Mais, d'autre part,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^{(n)}|^p = \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p.$$

Donc, le rapport envisagé est 1, à moins que le système (15) ne soit pas homogène. Or, le cas homogène est évident; il y correspond la solution extrémale $x_1 = x_2 = \ldots = 0$.

Il faut encore se débarrasser de la restriction que nous avons faite, savoir que les premiers membres des équations (15) soient indépendants. L'inégalité (14) nous assure que lorsqu'une combinaison linéaire des premiers membres s'annule identiquement, la même combinaison des seconds membres s'annule également. Par conséquent, on peut supprimer certaines des équations, de sorte que le système qui reste, équivalent d'une part au système initial, soit d'autre part du type considéré, et il est manifeste qu'en réduisant de cette façon le système, on n'altérera pas le minimum des M.

39. Dans ce qui précède, nous avons rattaché la solution du système (15) à un autre problème : rendre maximum l'expression C en faisant varier les μ sous la condition $A = 1$. J'essayerai en quelques

mots de rendre compte de l'ordre d'idées conduisant du premier problème au second. Oublions pour un instant les développements qui précèdent et supposons seulement que le système (15) admette des solutions telles que $\Sigma |x_k|^p$ converge et que, parmi ces solutions, il y en ait une qui rende cette somme minimum, c'est-à-dire qu'il y ait un système $(x_k^{(n)})$ qui rende minimum la fonction $\Sigma |x_k|^p$ des variables x_k, les x variant conformément aux conditions (15). Le procédé classique du Calcul différentiel fournit le résultat que cette solution particulière $x_k^{(n)}$ doit avoir la forme (21), les valeurs des μ restant encore à déterminer. On obtient des équations aux inconnues μ en substituant les expressions (21) dans les équations (15). Les équations obtenues sont linéaires dans le cas $p=2$; nous reviendrons plus loin sur ce cas particulier. Mais elles sont bien compliquées dans le cas général; dans ce cas, il faut se contenter de prouver l'*existence* d'une solution; cela suffira pour en déduire l'existence de la solution minimum $(x_k^{(n)})$ de (15). C'est ce que nous avons fait en suivant un chemin indirect. Ce chemin nous était suggéré par l'inégalité (13). En effet, soient $\mu_1^{(n)}, \ldots, \mu_n^{(n)}$ les valeurs à déterminer qui servent à définir les $x_k^{(n)}$; en substituant en (13) les expressions des $x_k^{(n)}$, il résulte

$$\frac{C(\mu_1, \ldots, \mu_n)}{A(\mu_1, \ldots, \mu_n)} \leq \frac{C(\mu_1^n, \ldots, \mu_n^n)}{A(\mu_1^n, \ldots, \mu_n^n)},$$

quelles que soient les valeurs $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Comme on a d'autre part, en vertu de (15), $A(\mu_1^{(n)}, \ldots, \mu_n^{(n)}) = 1$, les $\mu_i^{(n)}$ doivent être la solution du problème de maximum dont nous sommes parti.

Ajoutons que, dans le cas où $c_1 = 1$ et les autres c s'annulent, notre méthode revient à peu près à celle dont se servit, pour $p=2$, M. Schmidt dans le travail cité au n° 32. Dans ce cas, notre problème de maximum lié se transforme immédiatement dans un problème de minimum libre : rendre minimum l'expression

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| a_{1k} - \sum_{i=2}^{n} \mu_i a_{ik} \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

La valeur minimum de cette expression permet une interprétation intéressante de nature géométrique. Elle peut être considérée

dans l'espace à une infinité de dimensions, comme la distance du point aux coordonnées a_{1k} $(k = 1, 2, \ldots)$ de la variété linéaire déterminée par les $n - 1$ points (a_{2k}), ..., (a_{nk}), la distance de deux points (b_k), (c_k) y étant mesurée par

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - c_k|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

THÉORÈMES CONCERNANT LES SUITES DE SYSTÈMES (y_k).

40. Avant de passer au cas général, établissons quelques théorèmes dont nous nous servirons.

Considérons la suite indéfinie des quantités $y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots$. Nous supposons que ces quantités varient avec n, mais de telle façon que l'on ait constamment

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k^{(n)}|^p \leq G^p,$$

G désignant un nombre positif qui ne dépend pas des n. De plus, supposons que les $y_k^{(n)}$ tendent, pour $n \to \infty$, vers une valeur déterminée y_k^*. Cela posé, nous dirons que *la suite des systèmes* $(y_k^{(n)})$ *tend vers le système* (y_k^*).

Démontrons que l'on a aussi

$$(24) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k^*|^p \leq G^p.$$

En effet, on a pour m quelconque

$$\sum_{k=1}^{m} |y_k^*|^p = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{m} |y_k^{(n)}|^p \leq G^p.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs (24) restant $\leq G^p$, cette série converge et sa somme reste aussi $\leq G^p$.

Cela étant, envisageons la série

$$(25) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k^*;$$

nous avons déjà vu que les séries $\sum |a_k|^{\frac{p}{p-1}}$ et $\sum |y_k|^p$ étant convergentes, la série (25) converge absolument. De plus, la série (25) converge *uniformément* pour l'ensemble des systèmes (y_k) tels que

$$(26) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \leq G^p.$$

En effet, l'inégalité (4) donne pour tout système tel que (26) :

$$(27) \qquad \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k y_k \right| \leq G \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}};$$

le second membre de cette inégalité ne dépend plus des y, et il tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$.

En particulier, appliquons l'inégalité (27) aux systèmes $(y_k^{(n)})$ et y_k^* que nous venons de considérer; il vient

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n=\infty}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k (y_k^* - y_k^{(n)}) \right| & \leq \lim_{n=\infty} \left| \sum_{k=1}^{m} a_k (y_k^* - y_k^{(n)}) \right| + \overline{\lim_{n=\infty}} \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k y_k^{(n)} \right| + \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k y_k^* \right| \\ & \leq 0 \qquad + \qquad 2G \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}; \end{aligned}$$

et cela pour m quelconque; par suite, la limite à gauche est o et l'on a

$$(28) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k^* = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k^{(n)} \quad [1].$$

---

[1] Ce résultat entre comme cas particulier dans le théorème suivant, qui, de son côté, est aussi très facile à démontrer :

Lorsque la suite $(y_k^{(n)})$ tend vers (y_k^*) pour n infini, et lorsque, de plus, les quantités $a_k^{(n)}$ tendent vers des limites a_k^*, de sorte que

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^* - a_k^{(n)}|^{\frac{p}{p-1}} = 0,$$

41. Outre l'inégalité (24) et l'égalité (28) qui nous serviront dans la suite, nous aurons encore besoin d'un *principe de choix;* il nous permettra de conclure pour les suites de systèmes $(y_k^{(n)})$ que nous aurons à envisager, l'existence de suites partielles qui tendent vers des systèmes limites ([1]). Le voici :

Étant donnée une suite indéfinie de systèmes $(y_k^{(n)})$ *satisfaisant à l'inégalité* (26), *on peut en tirer une suite partielle de systèmes* $(y_k^{(n_1)})$, $(y_k^{(n_2)})$, ..., *tendant vers un système* (y_k^*).

Pour démontrer ce fait, envisageons la suite des quantités $y_1^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; ces quantités restent, en valeur absolue, $\leq G$. Donc, d'après Weierstrass, la suite admet une ou plusieurs valeurs limites. Soit y_1^* l'une quelconque, par exemple la plus petite de ces limites, et soient n'_1, n'_2, ... une suite d'indices tels que la suite $y_1^{(n'_1)}$, $y_1^{(n'_2)}$, ... tende vers y_1^*. De même, la suite $y_2^{(n'_1)}$, $y_2^{(n'_2)}$, ... admettra une ou plusieurs valeurs limites; soit y_2^* une de ces valeurs, et soient n''_1, n''_2, ... une suite d'indices tirés de la suite précédente, de sorte que $y_2^{(n''_1)}$, $y_2^{(n''_2)}$, ... tendent vers y_2^*. En continuant ce procédé, on va déterminer des valeurs y_3^*, y_4^*, ... et des suites (n'''_i), (n^{IV}_i), ... qui y correspondent et dont chacune est tirée de la précédente. Or, posons

$$n_1 = n'_1, \qquad n_2 = n''_2, \qquad n_3 = n'''_3, \qquad \ldots;$$

la suite (n_i) ainsi définie est contenue, sauf toujours un nombre fini de termes, dans chacune des suites (n'_i), (n''_i), ... Par conséquent, on a pour tous les k

$$y_k^* = \lim_{i=\infty} y_k^{(n_i)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

42. Dans certains cas, notre principe de choix permet de conclure que la suite $(y_k^{(n)})$ tend déjà elle-même vers un système limite (y_k^*). Ce cas se produit toujours quand le système (y_k^*) est *uniquement*

---

on aura aussi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* y_k^* = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} y_k^{(n)}.$$

([1]) *Voir* pour ce principe, son historique et son rôle en Analyse : FRÉCHET, *Sur quelques points du Calcul fonctionnel*, Thèse, Paris, 1906 (impr. aussi dans les *Rendiconti del Cir. mat. di Palermo*, t. XXII, 1906), Chap. IV-VII.

déterminé par le problème dont on est parti. En effet, supposons que pour un certain k, soit $k = k_1$, on n'ait pas

$$y^*_{k_1} = \lim_{n=\infty} y^{(n)}_{k_1};$$

dans ce cas, les quantités $y^{(n)}_{k_1}$ étant bornées dans leur ensemble, elles admettraient encore une seconde valeur limite

$$(29) \qquad y^{**}_{k_1} \neq y^*_{k_1},$$

et il existerait une suite d'indices m_1, m_2, ... tels que

$$y^{**}_{k_1} = \lim_{i=\infty} y^{(m_i)}_{k_1}.$$

Or, notre principe de choix s'applique aussi à la suite $(y_k^{(m_1)})$, $(y_k^{(m_2)})$, ...; appliqué à cette suite, il donnerait un système limite (y_k^{**}), lequel serait, en vertu de (29), distinct de (y_k^*), contre l'hypothèse.

43. Jusqu'ici, en considérant des suites de systèmes $(y_k^{(n)})$ qui tendent terme à terme vers un système (y_k^*), nous n'avons fait qu'une seule hypothèse peu restrictive, savoir que les sommes

$$(30) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k^{(n)}|^p \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

restent bornées dans leur ensemble. L'inégalité (24) nous assurait que la somme

$$(31) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k^*|^p$$

ne pouvait surpasser aucune des valeurs limites de la suite (30).

Envisageons maintenant le cas où l'on a précisément

$$(32) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k^*|^p = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |y_k^{(n)}|^p.$$

Nous allons démontrer que, dans ce cas, on a aussi

$$(33) \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |y_k^* - y_k^{(n)}|^p = 0.$$

Soit ε une quantité positive aussi petite qu'on voudra. La série (31) étant convergente, on pourra déterminer m de façon que

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |y_k^*|^p - \lim_{n=\infty} \sum_{m+1}^{\infty} |y_k^{(n)}|^p < \varepsilon^p.$$

Ayant déterminé m de cette façon, on aura, en vertu de (5),

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sum_{k=m+1}^{\infty} |y_k^* - y_k^{(n)}|^p$$
$$\leq \lim_{n=\infty} \left[\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |y_k^*|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |y_k^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p < (2\varepsilon)^p.$$

D'autre part, on a

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{m} |y_k^* - y_k^{(n)}|^p = 0:$$

car il ne s'agit que d'un nombre fini de termes, dont chacun tend vers zéro. Par conséquent,

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sum_{k=1}^{\infty} |y_k^* - y_k^{(n)}|^p < (2\varepsilon)^p:$$

et comme le premier membre ne dépend pas de la valeur de ε, il s'annulera précisément [1].

CAS OÙ IL Y A UNE INFINITÉ D'ÉQUATIONS.

44. Après avoir établi les préliminaires nécessaires, étudions maintenant le cas où le système (8) se compose d'une infinité dénom-

---

[1] Inversement, l'équation (33), supposée remplie, entraîne évidemment la convergence terme à terme des $y^{(n)}$ vers les y^*; mais elle entraînera aussi la relation (32), ce qui suit immédiatement de l'inégalité (7). Ajoutons que pour $p = 2$, ce type de convergence (*convergence forte*) fut introduit par M. Hilbert (*loc. cit.*, 4e Communication, p. 177); c'est aussi précisément de ce type que se sert M. Schmidt dans ses recherches. Énonçons encore deux théorèmes concernant la convergence forte; tous les deux se déduisent aisément des raisonnements qui précèdent. Le premier fut établi pour $p = 2$, par M. Schmidt; le second,

brable d'équations. Supposons la condition (14) remplie : et soit M^* le plus petit des nombres M tels que l'on ait (14). Cela posé, la condition sera aussi satisfaite par les n premières des équations (8) et l'on aura $M^{(n)} \leq M^*$. Soit $(x_k^{(n)})$ la solution *extrémale* (n° 38) de ces n équations. On a

$$(34) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^p = M^{(n)p} \leq M^{*p}.$$

Donc, la suite des systèmes $(x_k^{(n)})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ contient une suite partielle $(x_k^{(n_1)})$, $(x_k^{(n_2)})$, ... tendant vers un système (x_k^*). En appliquant à ce système la formule (28), on reconnaît immédiatement que les valeurs x_k^* satisfont à chacune des équations (8). De plus, la solution ainsi définie du système (8) est une solution *extrémale* au sens du n° 38, car l'inégalité (24) donne

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*|^p \leq M^{*p},$$

et, d'autre part, l'inégalité (13) fournit, pour toute solution (x_k) de (8),

$$(35) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \geq M^{*p}.$$

Mais il y a plus. Le système (8) n'admet qu'une seule solution extrémale. Nous l'avons déjà démontré pour le système fini (15);

---

pour le même cas, par M. Fréchet (*Comptes rendus*, 24 juin 1907). Voici le premier :

Soit donnée la suite $(y_k^{(n)})$, pour qu'il existe un système (y_k^*) tel que les systèmes $(y_k^{(n)})$ tendent fortement vers (y_k^*), il faut et il suffit que

$$\lim_{m=\infty,\, n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |y_k^{(m)} - y_k^{(n)}|^p = 0.$$

Le second théorème constitue une sorte de principe de choix pour la convergence forte :

Étant donnée une suite $(y_k^{(n)})$; pour que l'on en puisse tirer une suite partielle qui converge fortement, il faut et il suffit que les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k^{(n)}|^p$$

convergent uniformément pour tous les n.

le même raisonnement s'applique au cas général. Or, (x_k^*) est une telle solution extrémale; et il en serait de même pour tout autre système, déduit, conformément à notre principe de choix, de la suite des systèmes $(x_k^{(n)})$. Par conséquent, d'après le n° 42,

$$x_k^* = \lim_{n=\infty} x_k^{(n)}. \tag{36}$$

Mais on peut encore préciser beaucoup plus la nature de la convergence des solutions $(x_k^{(n)})$ vers la solution (x_k^*). Il résulte de (34), (35) et (36) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*|^p = M^{*p} = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^p;$$

donc, on a, d'après le n° 43,

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^* - x_k^{(n)}|^p = 0.$$

En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Pour que le système d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'équations

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

dont les coefficients a_{ik} sont tels que les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^{\frac{p}{p-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

convergent, admette au moins une solution (x_k) telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \le M^p,$$

il faut et il suffit que l'inégalité

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i\right| \le M \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{i=1}^{n} \mu_i a_{ik}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

ait lieu, quels que soient n et les nombres, réels ou non, μ_i.

En particulier, si M désigne le plus petit des nombres pour lesquels la condition est remplie, il n'y a qu'une seule solution jouissant de la propriété exigée. Au cas d'une infinité d'équations, cette solution extrémale (x_k^*) *est liée aux solutions extrémales* $(x_k^{(n)})$ *des systèmes partiels* (15) *par la relation*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^* - x_k^{(n)}|^p = 0.$$

45. Faisons maintenant une remarque qui pourra peut-être suggérer au lecteur de démontrer autrement les faits que nous venons d'établir. Soit (x_k^*) la solution extrémale du système (8) et ajoutons à ce système l'équation $x_1 = x_1^*$; le système ainsi modifié admettra évidemment la même solution extrémale. En appliquant à ce nouveau système la formule (14), on sera conduit à l'inégalité

$$\left| x_1^* - \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i \right| \leq M^* \left(\left| 1 - \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_{i1} \right|^{\frac{p}{p-1}} + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_{ik} \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Cette inégalité exprime que le point x_1^* du plan complexe doit être situé à l'intérieur ou sur la circonférence du cercle dont le centre est $\Sigma \mu_i c_i$ et dont le rayon est donné par le second membre de l'inégalité. Donc, le point x_1^* est contenu dans tous les cercles correspondant aux différents choix possibles de n et des μ_i, et comme la solution extrémale est unique, il n'y a pas d'autre point commun à tous ces cercles.

Le même raisonnement s'applique à chacun des points x_k^*.

Le lecteur qui voudra baser une démonstration sur la propriété indiquée de la solution extrémale fera bien de consulter une Note de M. Helly [1], où il trouvera étudié au même point de vue un système d'équations intégrales, correspondant par analogie au cas $p = 1$, que nous considérerons plus loin. Il convient aussi d'observer que lorsque les données sont réelles, et c'est dans ce cas que se place aussi la Note citée, les cercles peuvent être rem-

[1] HELLY, *Ueber lineare Funktionaloperationen* (*Sitzungsberichte d. k. Akademie d. Wiss., Wien*, t. CXXI, II*a*, février 1912).

placés par des segments de l'axe des nombres réels et les considérations géométriques nécessaires deviennent beaucoup plus simples.

LES SYSTÈMES HOMOGÈNES.

46. On peut encore se demander si le système (8) possède, outre (x_k^*), d'autres solutions admissibles, c'est-à-dire telles que $\Sigma |x_k|^p$ converge? Cette question est équivalente à l'autre si le système homogène

$$(37) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

possède, outre $x_1 = x_2 = \ldots = 0$, d'autres solutions admissibles. En effet, de toute solution (x_k^0) de (37), on déduira une solution $(x_k^{**}) = (x_k^* - x_k^0)$ de (8); inversement, toute solution (x_k^{**}) de (8) fournira une solution $(x_k^0) = (x_k^{**} - x_k^*)$; et, d'après (5), (x_k^0) et (x_k^{**}) sont en même temps admises ou non.

La discussion du système homogène (37) se ramène à la remarque suivante : Lorsque le système admet une solution (x_k^0) distincte de la solution évidente $x_1 = x_2 = \ldots = 0$, il faut avoir $x_k^0 \neq 0$ pour une ou plusieurs valeurs de l'indice k, et en fixant l'une de ces valeurs, soit $k = k_1$, on peut supposer $x_{k_1}^0 = 1$. Par conséquent, le système qui résulte en ajoutant à (37) l'équation

$$x_{k_1} = 1,$$

doit remplir, pour une certaine valeur de M, la condition portant sur les systèmes non homogènes. L'existence d'un indice k_1 et d'un nombre M tel que la condition soit remplie est donc nécessaire et suffisante pour que (37) possède, outre $x_1 = x_2 = \ldots = 0$, une solution admise.

Le calcul des solutions du système homogène présente, dans le cas de p quelconque, beaucoup d'inconvénients. On s'en rend aisément compte en comparant le cas général au cas $p = 2$. Je fais grâce au lecteur de cette comparaison; quant au cas $p = 2$, nous y reviendrons dans la suite. En tout cas, on peut former quelque sorte de règle mettant en évidence toutes les solutions; cette règle est purement théorique dans le cas général, mais

elle se prête bien au calcul effectif pour $p=2$. Envisageons le système (8), supposons les a_{ik} fixes et faisons varier les c_i; le nombre M^* pourra être considéré comme fonction des c. Il est évident que cette fonction sera bien définie pour tous les systèmes (c_i) qui se déduisent de (8) en y donnant aux x des valeurs telles que $\Sigma|x_k|^p$ converge. Donc, en substituant dans la fonction

$$M^*(c_1, c_2, \ldots)$$

les premiers membres de (8) au lieu des c_i, il en résulte une fonction $F(x_1, x_2, \ldots)$ des variables x_k, en nombre infini; cette fonction satisfait à l'inégalité

$$(38) \qquad F(x_1, x_2, \ldots) \leqq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Le signe $=$ correspond au cas où (x_k) est la solution extrémale d'un système tel que (8) avec des c_i convenables; le signe $<$ correspond au cas où il ne l'est pas. Pour que le système homogène (37) n'ait pas d'autre solution admissible que $x_1 = x_2 = \ldots = 0$, il faut et il suffit que tous les systèmes x_k soient de la première catégorie, c'est-à-dire que, dans (38), le signe $=$ convienne sans exception. Dans le cas contraire, le système (37) admet aussi des solutions distinctes de $x_1 = x_2 = \ldots = 0$. En tout cas, *la totalité des solutions de (37) est donnée par l'équation unique*

$$F(x_1, x_2, \ldots) = 0.$$

LE CAS $p=2$. LA THÉORIE DE M. SCHMIDT [1].

47. Passons maintenant au cas particulier le plus important, celui où $p=2$, et voyons ce qu'on peut tirer, pour ce cas particulier, de nos résultats généraux.

---

(1) *Cf.* outre les travaux indiqués de MM. Hilbert et Schmidt : G. Kowalewski, *Einführung in die Determinantentheorie*, Leipzig, 1909, p. 407-455; Böcher and Brand, *On linear equations with an infinite number of variables* (*Annals of Mathematics*, 2e series, vol. XIII, 1912, p. 167-186).

D'après (21), les x_k^n sont, dans le cas envisagé, de la forme

$$x_k^n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i \sum_{l=1}^{n} \bar{\mu}_l \bar{a}_{lk} = \sum_{i=1}^{n} v_i \bar{a}_{ik} \quad [1].$$

Les v_i se déterminent par les équations

$$(39) \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i = c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_{ik} a_{jk}.$$

Ces équations s'obtiennent en remplaçant dans (8) les x_k par les expressions $\Sigma v_i \bar{a}_{ik}$. Complétons maintenant le système (39) en y ajoutant l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij} v_i = x_j^{n},$$

et chassons les v; on obtient

$$(40) \qquad x_j^n = - \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{n1} & c_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{nn} & c_n \\ \bar{a}_{1j} & \ldots & \bar{a}_{nj} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}.$$

De plus, on a

$$M^{(n)2} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{n}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^n \bar{x}_k^n = \sum_{i=1}^{n} \left(v_i \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_{ik} \bar{x}_k^n \right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \bar{c}_i.$$

Donc les v_i satisfont à l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \bar{c}_i = M^{(n)2}.$$

---

[1] $\bar{a}$ désigne la quantité conjuguée à l'imaginaire a.

En ajoutant cette équation au système (39) et en chassant les c, il vient

$$(41)\qquad M^{(n)} = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} & c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn} & c_n \\ \bar c_1 & \dots & \bar c_n & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Or, l'hermitien

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} c_i \bar c_j = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ik} c_i \right|^2$$

étant évidemment positif, le déterminant qui figure au dénominateur, est réel et positif. Bien entendu, on suppose indépendants les premiers membres des équations (15); ce qui revient à supposer que le déterminant $|\alpha_{ik}| \neq 0$. Dans le cas contraire, les formules (40), (41) n'auront pas de sens. Les modifications nécessaires dans ce cas appartiennent à la théorie ordinaire des équations linéaires; nous n'insistons pas sur ce point.

Les solutions extrémales $(x_k^{(n)})$ des systèmes partiels tendent, comme dans le cas général, vers la solution extrémale (x_k^*) du système total, et cela de façon que

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^* - x_k^{(n)}|^2 = 0.$$

La formule (41) permet aussi d'énoncer la condition de résolubilité sous une forme où ne figurent plus les indéterminées μ. Envisageons la quantité $M^{(n)}$ comme fonction des c_i. Pour chaque système (c_i), la suite $M^{(1)} \leqq M^{(2)} \leqq M^{(3)} \leqq \dots$ tend vers une valeur positive déterminée, finie ou infinie : M^*. Ainsi, la formule

$$(42)\qquad M^*(c_1, c_2, \dots) = \lim_{n=\infty} \left(-\frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} & c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn} & c_n \\ \bar c_1 & \dots & \bar c_n & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

définit une fonction des variables c_i en nombre infini. Cela étant, *la condition nécessaire et suffisante pour que le système* (8) *admette une solution* (x_k) *telle que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leqq M^2, \tag{43}$$

est fournie par l'inégalité

$$M^*(c_1, c_2, \ldots) \leqq M.$$

Tous ces détails portent sur le cas général où les premiers membres sont supposés être indépendants. Mais la fonction $M^*(c_1, c_2, \ldots)$ existe aussi dans le cas contraire; seulement, pour calculer cette fonction, il faudrait apporter à la méthode précédente quelques modifications légères.

48. Pour pousser plus loin l'étude des systèmes (8), introduisons dans (42), au lieu des c_i, les premiers membres de (8), et, au lieu des $\bar{c}_i$, les expressions conjuguées. Il en résultera l'expression que nous avons désignée, dans le cas général, par $F(x_1, x_2, \ldots)$ (n° 46). Cette fonction F est la racine carrée de l'hermitien à une infinité de variables

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} A_{jk} x_j \bar{x}_k \qquad (A_{kj} = \bar{A}_{jk}), \tag{44}$$

dont les coefficients se calculent, dans le cas où les premiers membres sont indépendants, moyennant la formule

$$A_{jk} = -\lim_{n=\infty} \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{n1} & a_{1j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{nn} & a_{nj} \\ \bar{a}_{1k} & \ldots & \bar{a}_{nk} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}. \tag{45}$$

L'hermitien (44) reste, pour tout système de valeurs (x_k), $\leqq \Sigma |x_k|^2$. Le signe $=$ n'a lieu que si (x_k) est la solution extrémale d'un système tel que (8). Les solutions du système homo-

gène

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

sont caractérisées par le fait que l'hermitien (44) s'annule pour ces systèmes (x_k) et ne s'annule pas pour les autres. La condition pour que le système homogène n'admette pas de solution [sauf la solution évidente (0)], consiste en ce que $A_{jk} = {}^{1}_{0}$ suivant que $j \begin{smallmatrix} = \\ \neq \end{smallmatrix} k$.

Voici encore une interprétation simple des coefficients A_{jk}. Envisageons, pour un indice j donné, le système

$$(46) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = a_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Ce système admet évidemment la solution $x_k = {}^{1}_{0}$ pour $k \begin{smallmatrix} = \\ \neq \end{smallmatrix} j$. D'autre part, pour calculer la solution extrémale du système, on n'a qu'à remplacer dans la formule (40) les c_i par les a_{ij} et à faire croître n indéfiniment ; la comparaison avec (45) fournit

$$x_k = A_{jk} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

C'est la solution extrémale cherchée du système (46). La différence des deux solutions de (46) : $A_{j1}, A_{j2}, \ldots, A_{jj} - 1, \ldots$ satisfait donc au système homogène. De cette façon, on fait correspondre à chaque valeur de j une solution du système homogène.

D'une façon plus générale, soit (ξ_k) un système quelconque de valeurs ξ_k telles que $\Sigma |\xi_k|^2$ converge. Le système d'équations

$$(47) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

admet évidemment la solution $x_k = \xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Évaluons maintenant la solution extrémale du système (47). Les n premières des équations (47) admettent la solution extrémale

$$x_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{\infty} A_{jk}^{(n)} \xi_j \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

nous y désignons par $A_{jk}^{(n)}$ la $n^{\text{ième}}$ valeur approchée de A_{jk}, qui

figure dans (45). Mais $x_1 = \mathrm{A}_{j1}^n = \overline{\mathrm{A}}_{1j}^n$, $x_2 = \mathrm{A}_{j2}^n = \overline{\mathrm{A}}_{2j}^n$, ... est la solution extrémale des n premières des équations (46) et, d'autre part, ces équations admettent aussi la solution $x_k = \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}$ pour $k \overset{=}{\neq} j$; il en suit que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mathrm{A}_{jk}^n|^2 = 1.$$

Par conséquent, on pourra appliquer la formule (28); on n'aura qu'à remplacer les a_k par les ξ_j, les x_k^* par les A_{jk} et les $x_k^{(n)}$ par les $\mathrm{A}_{jk}^{(n)}$, et il viendra l'expression cherchée de la solution extrémale

$$x_k^* = \lim_{n=\infty} x_k^n = \lim_{n=\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{A}_{jk}^n \xi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{A}_{jk} \xi_j.$$

La différence des deux solutions trouvées de (47) satisfait au système homogène. Elle en fournit la solution générale; en effet, si (x_k^0) en est solution, il suffira de choisir $\xi_k = -x_k^0$; alors le système (47) deviendra homogène, admettra $x_1 = x_2 = \ldots = 0$ comme solution extrémale, et notre procédé conduira à la solution (x_k^0).

Donc, les formules

$$x_k = \xi_k + \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{A}_{jk} \xi_j \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

comprennent toutes les solutions du système homogène. On peut aussi exprimer ce résultat en disant que toute solution du système homogène est la combinaison linéaire d'un nombre fini ou d'une infinité des solutions particulières $\mathrm{A}_{j1}, \ldots, \mathrm{A}_{jj} - 1, \ldots$ ($j = 1, 2, \ldots$), les multiplicateurs ξ_j étant assujettis à la condition que $\Sigma |\xi_j|^2$ converge.

49. Tous ces calculs se simplifient beaucoup dans le cas particulier où

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \bar{a}_{jk} = \begin{matrix}1\\0\end{matrix}$$

suivant que $i \overset{=}{\neq} j$); ce que nous exprimons avec MM. Hilber et

Schmidt en disant que les formes linéaires

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

constituent un système *orthogonal et normé*.

Les formules (40), (41) donnent pour ce cas

$$x_k^n = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ik} c_i, \qquad M^{(n)2} = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2.$$

Par conséquent, la condition, pour que le système admette une solution (x_k) telle que (43), consiste en ce que

$$M^{*2} = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \leqq M^2,$$

et la solution extrémale (x_k^*) est fournie par

$$x_k^* = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_{ik} c_i \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Pour cette solution on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2.$$

Les coefficients de l'hermitien (44) sont

$$(48) \qquad A_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nj} \bar{a}_{nk}.$$

Si, dans le cas posé, le système homogène n'admet pas d'autre solution que $x_1 = x_2 = \ldots = 0$, nous disons que le système des premiers membres est *complet;* car ce fait équivaut à ce qu'il n'existe pas de forme linéaire qui serait orthogonale à la fois à tous les premiers membres. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, comme nous l'avons vu, que $A_{jk} = {1 \atop 0}$ pour $j \genfrac{}{}{0pt}{}{=}{\neq} k$. D'après l'expression (48) des A_{jk}, cette condition peut être énoncé en disant que

les formes *transposées*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} x_i \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

constituent aussi un système orthogonal et normé. Cette façon d'exprimer la condition mérite d'attention à cause de l'analogie évidente avec le cas bien connu d'un système orthogonal et normé de n formes linéaires à n variables. Dans ce cas, le fait que le système est complet résulte immédiatement de ce qu'il y a le même nombre de formes que de variables; dans le cas d'une infinité de variables, il n'y a pas de raison analogue.

Tous ces résultats concernant les systèmes orthogonaux, s'établissent aussi directement d'une façon très simple. Nous ne tenons pas à en donner la démonstration directe; ce ne serait que répéter rapidement, avec des modifications évidentes, les raisonnements faits dans le cas général.

50. Le cas particulier que nous venons de considérer fut discuté pour la première fois par M. Hilbert; il y était conduit par un ordre d'idées dont nous parlerons plus tard. M. Schmidt a étudié ce cas particulier d'une façon plus détaillée; de plus, il a réussi à y ramener le cas général $p=2$ (1). Dans sa méthode, le cas particulier considéré joue un rôle très important; c'est à ce cas particulier qu'il ramène le cas général, et cela en appliquant un procédé très simple : l'*orthogonalisation*. Ce procédé consiste à remplacer le système (8) par un système équivalent

$$(49) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} x_k = d_i \qquad (i=1, 2, \ldots)$$

dont les premiers membres sont, d'une part, des combinaisons linéaires de ceux des équations (8), et, d'autre part, ils forment un système orthogonal et normé. D'une façon plus précise, la $n^{\text{ième}}$ des équations (49) est une combinaison linéaire des n premières équations (8). Pour qu'une telle réduction soit possible, il faut que les équations (8) (ou plutôt tout nombre fini de ces équations)

(1) *Cf.* le Mémoire cité au n° 32.

soient linéairement indépendantes; or, nous avons vu que cette restriction est seulement apparente. Les multiplicateurs et alors les quantités b_{ik} et d_i s'obtiennent aisément. Pour faciliter le calcul, nous formerons d'abord un système intermédiaire

$$(50)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} b'_{ik} x_k = d'_k \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

en exigeant seulement l'orthogonalité des premiers membres; pour en passer au système normé (49), on aura à diviser chaque équation par

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} | b'_{ik} |^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Les données d'un tel système (50) se déterminent, à partir des équations linéaires qui expriment l'orthogonalité, par les formules

$$b'_{nk} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} & 1 \\ a_{nk} & \ldots & a_{nk} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}, \qquad d_n = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} & 1 \\ b_1 & \ldots & b_n & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Ajoutons que les premiers membres des équations (49) se calculent aussi à l'aide des formules

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x_k\right|^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} (\Lambda^{n}_{jk} - \Lambda^{(n-1)}_{jk}) x_j \bar{x}_k \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Cela revient au fait évident que deux systèmes équivalents conduisent toujours au même hermitien (44).

Ayant transformé de cette façon le système (8) dans le système de type particulier (49), la discussion et la résolution de ce nouveau système s'abordent, comme nous l'avons vu, par des formules très simples. Or, en substituant dans ces formules, au lieu des b et des d, leurs expressions moyennant les a et les c, on retrouvera les formules établies plus haut par une autre méthode.

Mais c'est seulement l'idée principale de l'œuvre de M. Schmidt

dont nous venons de parler; quant aux détails, il nous faut renvoyer le lecteur au Mémoire original. Une des caractéristiques les plus intéressantes de ce Mémoire est de voir et de parler comme s'il s'agissait de la Géométrie. Supposons, pour fixer les idées, qu'il ne s'agisse que des quantités réelles. Interprétons les systèmes (a_k) ou (x_k) lorsque Σa_k^2 ou Σx_k^2 converge, comme des vecteurs dans l'espace à une infinité de dimensions. Étant donné un nombre fini ou une infinité de vecteurs, les vecteurs orthogonaux à chacun d'eux constituent une certaine variété linéaire, et l'ensemble des vecteurs orthogonaux à cette dernière variété sera la plus petite variété linéaire contenant les vecteurs donnés. Par suite, quand il s'agit de résoudre un système homogène, on n'aura qu'à envisager les coefficients comme des coordonnées de vecteurs, la variété orthogonale à ces vecteurs représentera la totalité des solutions. Les systèmes non homogènes peuvent être rendus homogènes en introduisant une inconnue auxiliaire. Enfin, quant à l'orthogonalisation, ce procédé revient en principe à remplacer les systèmes des vecteurs donnés par un système de vecteurs orthogonaux l'un à l'autre, et cela de sorte que les deux systèmes déterminent la même variété linéaire.

LES CAS $p = 1$ ET $p = \infty$.

51. Envisageons maintenant le cas $p = 1$. Ce cas n'était pas compris dans nos considérations précédentes qui portaient seulement sur $p > 1$, mais il y entre comme cas limite.

Dans le cas envisagé, il s'agit de déterminer une solution (x_k) du système (8), et cela de sorte que la série

$$(51) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

converge. Quant aux données, nous faisons l'hypothèse que, pour tous les i, on ait

$$\lim_{k=\infty} a_{ik} = 0.$$

En voici les raisons. Si l'on exigeait que la série

$$(52) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

converge pour tout système (x_k) tel que (51) existe, il suffirait de supposer que les quantités $|a_k|$ ($k = 1, 2, \dots$) restent bornées dans leur ensemble. Mais nous aurons encore besoin, tout comme plus haut, que cette série converge uniformément pour tous les systèmes (x_k) tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq G.$$

Donc, en particulier, la convergence devra être uniforme pour tous les systèmes tels que l'un des $x_k = G$, les autres o. Substituons ces valeurs successivement dans l'expression (52); les restes $n^{\text{ièmes}}$ seront respectivement

$$0, \quad \dots, \quad 0, \quad Ga_{n+1}, \quad Ga_{n+2}, \quad \dots.$$

Pour que la convergence soit uniforme, il faut et il suffit que, pour $n \to \infty$, ces restes tendent uniformément vers zéro. Ce qui revient à supposer, comme nous venons de le faire, que

$$a_k \to 0.$$

Cette restriction posée, tous les raisonnements auxiliaires, dont nous nous sommes servis dans le cas général, s'étendent, *mutatis mutandis*, au cas $p = 1$.

52. Je dis *qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le système* (8) *admette une solution* (x_k) *telle que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq M, \tag{53}$$

consiste en ce que l'inégalité

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i \right| \leq M \times \underset{k=1,2,\dots}{\text{borne sup. des}} \left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_{ik} \right| \tag{54}$$

ait lieu quels que soient n et les μ_i.

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est aussi suffisante. Il suffira d'envisager le cas de n équations, le passage au cas d'une infinité d'équations se faisant tout comme pour $p > 1$.

Cela étant, on conclut immédiatement de l'hypothèse faite : $a_{ik} \to 0$ qu'il existe un nombre m tel que la valeur de

$$\underset{k=1,2,\ldots}{\text{borne sup. des}} \left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_{ik} \right|$$

ne dépend que des indices $k \leqq m$. Ce fait permet de remplacer notre système contenant une infinité d'inconnues par un autre à m inconnues

$$(55) \qquad \sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En effet, supposons que le système (55) admette une solution (x_k) telle que

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k| \leqq M;$$

alors, en posant $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = 0$, on aura une solution du système original, satisfaisant à la condition (53). Or, en vertu de la propriété indiquée du nombre m, la condition (54) est remplie pour le système réduit (56). D'autre part, on a évidemment

$$\underset{k=1,2,\ldots}{\text{borne sup. des}} \left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_{ik} \right| \leqq \left[\sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_{ik} \right|^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}}$$

pour tous les $p > 1$. Par conséquent, les données du système (55) satisfont pour tous les p aux inégalités

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i \right| \leqq M \left[\sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_{ik} \right|^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

Mais c'est précisément la condition pour que le système (55) admette une solution $(x_k^{(n)})$ telle que

$$(56) \qquad \sum_{k=1}^{m} |x_k^{(p)}|^p \leqq M^p.$$

Par conséquent, il existe pour chaque valeur de $p > 1$ une solu-

tion $(x_k^{(p)})$ telle que (56); pour fixer les idées, on peut prendre par exemple les solutions extrémales.

Les quantités $|x_k^{(p)}| \leqq M$ sont bornées dans leur ensemble. Donc il existe une suite d'exposants $p_1, p_2, \ldots$ tendant vers 1 et telle que les limites

$$x_k^* = \lim_{p \to 1} x_k^{(p)} \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

existent. Comme tous les systèmes $(x_k^{(p)})$ satisfont aux équations (55), le système limite (x_k^*) y satisfera aussi. De plus, on a

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k^*| = \lim_{p \to 1} \sum_{k=1}^{m} |x_k^{(p)}|^p \leqq \lim_{p \to 1} M^p = M.$$

La suffisance de la condition est donc démontrée.

53. Un second cas limite correspond à $p \to \infty$. On exige de la solution (x_k) beaucoup moins que dans les cas déjà traités; on exige seulement *que les valeurs* (x_k) *soient bornées dans leur ensemble*. Quant aux données, on fait la seule hypothèse que les premiers membres des équations (8) convergent pour tout système borné (x_k). Cela revient à supposer que toutes les séries $\sum_k a_{ik}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ convergent absolument.

Je dis que *la condition nécessaire et suffisante pour que le système* (8) *admette une solution* (x_k) *telle que l'on ait, pour tous les* k, $|x_k| \leqq M$, *consiste en ce que l'inégalité*

$$(57) \qquad \left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i \right| \leqq M \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_{ik} \right|$$

ait lieu quels que soient n *et les* μ_i.

Le passage d'un nombre fini d'équations à une infinité se faisant presque tout comme dans les autres cas, nous pourrons nous borner à étudier le cas de n équations.

La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est aussi suffisante, supposons qu'elle soit remplie et supposons de plus (nous savons que cela ne restreint pas la généralité) qu'il n'existe aucune relation linéaire entre les premiers membres des

équations. Cela étant, on voit aisément que le rapport

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{ik}\right|}{\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{ik}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}}$$

tend vers 1 pour $p \to \infty$ et cela uniformément pour tout choix des μ_i. L'inégalité (57) peut donc être remplacée par

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i c_i\right| \leqq (M+\varepsilon)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{ik}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}},$$

où ε désigne une quantité positive choisie si petite qu'on veut et p une quantité positive suffisamment grande. Mais l'inégalité ainsi modifiée exprime précisément la condition pour que notre système d'équations admette une solution (x_k) telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p \leqq (M+\varepsilon)^p.$$

Soit $(x_k^{(\varepsilon)})$ une telle solution ; on aura évidemment, pour tous les k, $|x_k^{(\varepsilon)}| \leqq M+\varepsilon$. En faisant tendre ε vers zéro, on parvient à définir une suite indéfinie de solutions $(x_k^{(\varepsilon)})$. Puis, en appliquant un procédé analogue à celui du n° 41, on déterminera une suite partielle, de sorte que pour tous les k, $x_k^{(\varepsilon)}$ tend vers une limite x_k^{*}. Alors, le système (x_k^{*}) donnera la solution exigée.

Il convient encore d'observer que, tandis que, dans le cas général $p > 1$, la solution extrémale était toujours unique, il n'en sera pas de même dans les deux cas limites que nous venons de considérer. On se rend aisément compte des raisons d'une telle différence. Par exemple, pour le cas $p = 1$, cela revient au fait que, dans l'inégalité $\Sigma|a_k + b_k| \leqq \Sigma|a_k| + \Sigma|b_k|$, le signe $=$ peut avoir lieu sans que tous les rapports $a_k : b_k$ soient égaux entre eux.

CHAPITRE IV.

LA THÉORIE DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES À UNE INFINITÉ DE VARIABLES.

LES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.

54. Nous venons de former des critères portant sur des classes très étendues de systèmes d'équations ; il nous reste à les appliquer à des cas de plus en plus particuliers, en dirigeant notre attention sur les détails. Pour fixer les idées, nous ne nous occuperons que du cas $p = \frac{p}{p-1} = 2$ qui est le plus important ; mais je me hâte d'observer que la plupart des raisonnements qui suivent s'étendent facilement au cas général $p > 1$ et aussi aux deux cas limites.

Considérons l'*espace hilbertien;* nous y entendons l'ensemble des systèmes (x_k) tels que $\Sigma |x_k|^2$ converge. Nous étudierons les substitutions linéaires à une infinité de variables, portant sur l'espace hilbertien.

Voici ce que nous entendons par *substitution linéaire*. A chaque élément (x_k) de notre espace on fait correspondre (suivant une certaine loi) un élément bien déterminé (x'_k). On suppose que la correspondance soit *distributive*, c'est-à-dire qu'elle fasse correspondre à l'élément (cx_k) l'élément (cx'_k) et à l'élément $(x_k + y_k)$ l'élément $(x'_k + y'_k)$. En Algèbre, où il ne s'agit que d'un nombre fini de variables, la distributivité de la correspondance entraîne aussi sa continuité. Dans notre cas, il faut supposer explicitement la *continuité* de la correspondance, c'est-à-dire qu'il faut exiger que, lorsqu'une suite d'éléments tend vers un élément limite, la suite correspondante tende vers l'élément qui correspond à cet élément limite. Ce sont ces correspondances,

distributives et continues à la fois, que nous appellerons *substitution linéaire*.

55. Rappelons ce que nous avons entendu par l'expression : la suite des éléments $(x_k^{(n)})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tend vers l'élément (x_k). Nous y avons résumé les deux faits suivants : 1° la suite des $x_k^{(n)}$ tend vers x_k, et cela pour tous les k ; 2° les quantités $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^2$ restent bornées dans leur ensemble (n° 40). En utilisant cette définition, on démontre aisément que la continuité entraîne une autre propriété importante des substitutions linéaires, savoir celle d'être *bornée*. C'est-à-dire, lorsque la substitution est continue, il existe une constante positive M telle que

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |x'_k|^2 \leq M^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2.$$

En effet, dans le cas contraire, il existerait une suite d'éléments $(x_k^{(n)})$ et une suite correspondante d'éléments $(x_k^{(n)\prime})$, de sorte que les sommes $\Sigma\,|x_k^{(n)}|^2$ restent bornées dans leur ensemble, tandis que les sommes $\Sigma\,|x_k^{(n)\prime}|^2$ croissent, pour n infini, au delà de toute limite. De la suite $(x_k^{(n)})$, on pourrait tirer, d'après notre principe de choix (n° 41), une suite partielle tendant vers un élément limite ; la suite qui y correspond, ne jouissant pas de la propriété 2°, ne pourrait tendre vers aucun élément limite. Donc, la continuité de la substitution serait en défaut.

Désignons par M_A la plus petite des valeurs M qui satisfait à (1). Nous appellerons la constante M_A la *borne* de la substitution A.

56. Voici une autre conséquence immédiate de la définition. Supposons que la suite $(x_k^{(n)})$ tende vers l'élément (x_k) d'une façon *forte*, c'est-à-dire de sorte que

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(n)}|^2 \to 0$$

pour $n \to \infty$. La substitution étant distributive, elle fait correspondre aux éléments $(x_k - x_k^{(n)})$ les éléments $(x'_k - x_k^{(n)\prime})$. Donc la

fournira

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x'_k - x_k^{n}|^2 \leq M^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x'_k - x_k^{n}|^2,$$

ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{n}|^2 \to 0.$$

En particulier, considérons les *réduites* de l'élément (x_k). Nous entendons par $n^{\text{ième}}$ réduite ce que devient (x_k) lorsqu'on y remplace les x_k, à partir de x_{n+1}, par des zéros. Les réduites de (x_k) tendent d'une façon forte vers (x_k); par conséquent,

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \left| x_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right|^2 \to 0$$

avec $\frac{1}{n}$, et à plus forte raison

$$(4) \qquad x_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Nous y avons désigné par (a_{ik}) l'élément qui correspond, par notre substitution, à l'élément $x_j = \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}$ pour $j \begin{smallmatrix} = \\ \neq \end{smallmatrix} i$.

Nous voilà arrivés à l'expression analytique des substitutions linéaires, fournie par les formules (3) ou (4). A toute substitution linéaire correspond un tableau (a_{ik}) tel que les séries $\Sigma a_{ik} x_k$ convergent pour tous les i et pour tous les éléments (x_k) de l'espace hilbertien. De plus, ce tableau satisfait à l'inégalité

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right|^2 \leq M^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2.$$

Inversement, lorsqu'un tableau à double entrée (a_{ik}) satisfait, pour une certaine valeur de M et pour tous les éléments (x_k) de notre espace, à l'inégalité (5), ce tableau donne naissance à une substitution linéaire, définie par les formules (4). En effet, la correspondance définie par ces formules est évidemment distributive et bornée ; pour en conclure la continuité, il suffit de remarquer que les formes linéaires $\Sigma a_{ik} x_k$ sont des fonctions continues de l'élément variable (x_k), ce que nous avons démontré dans le Chapitre précédent (n° 41).

L'inégalité (5), supposée remplie pour tout élément (x_k), équivaut évidemment à l'autre

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right|^2 \leqq M^2\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2,$$

que l'on suppose remplie pour tout choix des entiers m et n et des quantités $x_1, \ldots, x_n$. De là la règle suivante :

Pour que le tableau considéré (a_{ik}) *donne lieu à une substitution linéaire* A *telle que* $M_A \leqq M$, *il faut et il suffit que l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right|^2 \leqq M^2\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2$$

ait lieu pour tout choix des entiers m, n *et des quantités* $x_1, \ldots, x_n$.

57. Il convient ici d'indiquer un fait très remarquable, découvert par MM. Hellinger et Tœplitz. Ce fait consiste en ce que, *au lieu d'admettre l'inégalité* (5), *il suffit de supposer que le premier membre de* (5) *converge pour chaque* (x_k). L'existence d'une constante finie M_A découle de cette dernière hypothèse par un raisonnement très délicat. Les auteurs ont énoncé leur théorème sous une forme un peu différente; ils l'attachent à la notion de forme bilinéaire que nous rencontrerons dans le paragraphe suivant [1].

---

[1] HELLINGER u. TŒPLITZ, *Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen* (*Math. Annalen*, t. LXIX, p. 289-330). Les auteurs considèrent l'expression

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k\right)y_i ;$$

ils supposent qu'elle converge pour les éléments (x_k), (y_k) de l'espace hilbertien. D'après un théorème des mêmes auteurs, qui est bien plus simple et dont nous avons parlé dans le Chapitre précédent (n° 35), l'hypothèse que la série $\Sigma b_i y_i$ converge pour tout élément (y_i), entraîne la convergence de $\Sigma |b_i|^2$. Cette remarque permet de ramener l'hypothèse des auteurs à celle du texte.

Voici en quelques mots l'idée de la démonstration : contrairement au théorème

Ajoutons qu'on pourrait remplacer, dans la définition des substitutions linéaires, la première définition de la continuité dont nous nous sommes servis, par une autre fondée sur la notion de convergence *forte*. La correspondance serait dite continue si toutes les fois que la suite des éléments $(x_k^{(n)})$ tend vers (x_k) d'une façon forte [c'est-à-dire comme (2)], la suite des $(x_k^{(n)\prime})$ tend vers (x'_k) de la même façon. C'est seulement la définition qui sera modifiée; les deux définitions étant équivalentes, la notion elle-même restera tout à fait intacte.

LES FORMES BILINÉAIRES ET LES SUBSTITUTIONS TRANSPOSÉES.

58. C'est à M. Hilbert que l'on doit la théorie des tableaux (a_{ik}) tels que nous les envisageons. Son point de départ diffère du nôtre au point de vue formel. Il considère la forme infinie bili-

---

à démontrer, on suppose que la valeur de l'expression

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k\right|^2}{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2}$$

puisse surpasser toute borne finie. S'il en était ainsi, les expressions analogues, dans lesquelles la sommation ne commence qu'à partir de $i = m$, $k = n$, jouiraient de la même propriété.

D'autre part, si pour un élément déterminé (x_k), on n'étend la sommation que jusqu'à des indices m', n' assez grands, la valeur de l'expression n'en sera pas sensiblement altérée. Grâce à ces faits, on peut déterminer successivement les indices i_1, k_1; i_2, k_2; ... et les quantités x_1, ..., x_{k_1}; ..., x_{k_2}; ..., de sorte que $\Sigma\,|x_k|^2$ converge, que la valeur de l'expression

$$\sum_{i=i_\nu+1}^{i_{\nu+1}}\left|\sum_{k=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}} a_{ik}x_k\right|^2$$

croisse rapidement pour ν infini et que, d'autre part, la valeur de l'expression

$$\sum_{i=i_\nu+1}^{i_{\nu+1}}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k\right|$$

néaire

$$(6) \qquad A(x, y) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} x_k y_i;$$

et il suppose que les valeurs absolues des *réduites*

$$[A(x, y)]_n = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_k y_i,$$

formées pour tous les n et tous les éléments (x_k), (y_k) tels que

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leq 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \leq 1,$$

restent inférieures à une constante positive M. On en déduit aisément la convergence des séries (4) et l'inégalité (5); par suite, les tableaux de M. Hilbert définissent des substitutions linéaires.

Inversement, lorsqu'on accepte notre point de départ, toute substitution linéaire conduit, d'après l'analyse faite au n° 56, à un tableau (a_{ik}) bien déterminé; l'inégalité (5), liée à celle de Cauchy-Lagrange, nous assure que l'on se trouve dans l'hypothèse

---

ne dépende sensiblement que des termes d'indices $h_\nu + 1, \ldots, h_{\nu+1}$. Alors, pour ce système particulier (x_k), le premier membre de (5) diverge.

Observons que ce raisonnement est en relation très intime avec un raisonnement encore peu connu, de M. Lebesgue, qui rattache l'existence de fonctions continues périodiques, de période 2π et dont la série de Fourier diverge ou ne converge pas uniformément au fait suivant : La limite supérieure de la valeur absolue des $n^{\text{ièmes}}$ sommes partielles des séries de Fourier des fonctions $f(x)$ continues de période 2π et telles que l'on ait constamment $|f| \leq 1$, croît indéfiniment avec n [*Sur la divergence et convergence non uniforme des séries de Fourier* (*Comptes rendus*, 1905, 2e sem., p. 875-877); *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 86]. L'idée de M. Lebesgue vient d'être approfondie par M. Fejér; elle fut aussi étendue à des problèmes analogues par M. Haar et par M. Lebesgue lui-même. *Cf.* HAAR, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Thèse, Göttingen, 1909 (réimpr. *Math. Annalen*, t. LXIX, p. 331-371); LEBESGUE, *Sur les intégrales singulières* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. I, 1910, p. 25-117); FEJÉR, *Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXVIII, 1911, p. 63-104), où se trouve aussi une liste des travaux antérieurs. Ces recherches n'appartiennent pas au sujet de notre Ouvrage, mais nous les avons mentionnées en pensant que leur étude suggérera au lecteur d'appliquer la méthode de MM. Hellinger et Toeplitz à beaucoup de problèmes rentrant dans notre théorie, et, en particulier, d'étendre leur théorème à tous les cas $p \geq 1$.

de M. Hilbert. Ces deux inégalités nous assurent en même temps de la convergence de

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k\right) y_i.$$

et de ce que cette somme reste, en valeur absolue, $\leqq$ M. La formule (6) et l'inégalité de Cauchy-Lagrange donnent

$$(8)\quad \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k\right) y_i = \lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} y_i\right) x_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} y_i\right) x_k$$

D'une façon plus générale, l'inégalité

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{m+p}\sum_{k=1}^{n+q} a_{ik} x_k y_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k y_i\right| \\
&\quad < \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{n+q} a_{ik} x_k y_i\right| + \left|\sum_{i=m+1}^{m+p}\sum_{k=1}^{n+q} a_{ik} x_k y_i\right| \\
&\quad \leqq M\left(\sum_{k=n+1}^{n+q} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + M\left(\sum_{i=m+1}^{m+p} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

montre que la limite

$$(9)\quad \lim_{m=\infty,\, n=\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k y_i$$

existe et qu'elle ne dépend pas de la façon dont m et n croissent vers l'infini. Lorsque (x_k) et (y_k) sont tels que (7), la valeur numérique de (9) $\leqq$ M.

Revenons à la formule plus particulière (8). On peut l'interpréter comme il suit : le tableau (a_{ik}) définit, outre la substitution (4), une seconde substitution linéaire

$$(10)\quad y''_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} y_i ;$$

les deux substitutions sont liées entre elles par la relation

$$(11)\quad \sum_{i=1}^{\infty} x'_i y_i = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y''_k .$$

Nous dirons que les substitutions (4) et (10) sont les *transposées* l'une de l'autre. Pour abréger, nous désignerons la substitution (4) par A et sa transposée (10) par $\mathfrak{A}$.

Enfin, quant aux bornes M_A et $M_{\mathfrak{A}}$ qui correspondent aux substitutions A et $\mathfrak{A}$, on a évidemment

$$M_A = M_{\mathfrak{A}}.$$

L'INVERSION DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.

59. Tout comme en Algèbre, on nomme *produit* de deux substitutions linéaires A, B et l'on désigne par AB la substitution évidemment linéaire qui résulte des deux premières, effectuées successivement :

$$AB(x_k) = A[B(x_k)].$$

Ce produit dépend, en général, de l'ordre des facteurs.

Soient (a_{ik}), (b_{ik}) et (c_{ik}) les tableaux qui correspondent respectivement aux substitutions A, B et $C = AB$; les c_{ik} se déterminent par les formules

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} b_{jk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots).$$

Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ les substitutions transposées de A et B; la transposée du produit AB sera fournie par le produit $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$. Ce fait découle immédiatement des formules précédentes.

Désignons par E la substitution identique $x'_k = x_k (k = 1, 2, \ldots)$; il y correspond le tableau (e_{ik}) : $e_{ik} = 1$ pour $i = k$, 0 pour $i \neq k$.

60. Étant donnée la substitution linéaire A, nous nous proposons de déterminer la substitution *réciproque* A^{-1} de A, satisfaisant aux relations

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \tag{12}$$

Quand A^{-1} existe, elle est univoquement déterminée par (12), ou plutôt, elle l'est déjà par l'une ou l'autre des deux relations

$A^{-1}A = E$ et $AA^{-1} = E$. En effet, soit D une substitution telle que $DA = E$, on aura $D = DE = DAA^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}$.

Supposons donc que A^{-1} existe ; désignons sa transposée pour l'instant par $\mathfrak{A}'$. Les substitutions $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}$ sont respectivement les transposées de $A^{-1}A = E$ et de $AA^{-1} = E$; donc, on a aussi

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{A} = E,$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{A}'$ est la réciproque de $\mathfrak{A}$ et peut alors être désignée par $\mathfrak{A}^{-1}$.

Soit maintenant $\frac{1}{m}$ la borne des substitutions A^{-1} et $\mathfrak{A}^{-1}$. Alors A^{-1} faisant correspondre (x_k) à (x'_i) et $\mathfrak{A}^{-1}$ faisant correspondre (y_k) à (y'_k), on a

$$(13) \qquad m^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x'_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x'_k \right|^2,$$

$$(14) \qquad m^2 \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |y'_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} y'_i \right|^2.$$

Les inégalités (13), (14) expriment une condition nécessaire pour que A^{-1} existe. Elles doivent avoir lieu pour tous les éléments (x_k), (y_i) de l'espace hilbertien, autrement dit, une condition nécessaire pour que la substitution linéaire A admette une réciproque A^{-1}, consiste en ce que les expressions

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right|^2}{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}, \qquad \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} y_i \right|^2}{\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2}$$

restent supérieures à une quantité déterminée $m^2 > 0$.

Nous allons montrer que cette condition nécessaire est aussi suffisante.

Supposons la condition remplie et envisageons les systèmes d'équations (4) et (10) ; nous y regardons les a_{ik}, x_i, y'_k comme donnés. Posons, dans (11), $\mu_1, \ldots, \mu_n, 0, 0, \ldots$, au lieu des y_i; en

appliquant encore l'inégalité de Cauchy-Lagrange, il viendra

$$\left|\sum_{i=1}^{n} y_i x_i'\right|^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i'|^2 \leqq \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{\infty} |x_i'|^2 \sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n} y_i a_{ik}\right|^2.$$

Mais c'est précisément la condition pour que le système (4) admette une solution (x_k) telle que

$$(15) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leqq \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{\infty} |x_i'|^2.$$

Par conséquent, le système (4) admet, pour tout élément donné (x_i'), au moins une solution telle que (15).

De même le système (10) admet, pour tout élément donné (y_k''), au moins une solution (y_i) telle que

$$(16) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \leqq \frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{\infty} |y_k''|^2.$$

Je dis que les solutions des systèmes (4) et (10) sont uniques. En fait, dans le cas contraire, si par exemple (4) admettait deux solutions distinctes, le système homogène qui y correspond admettrait une solution (x_k) distincte de la solution évidente $x_1 = x_2 = \ldots = 0$. Mais d'autre part, pour un système homogène, le second membre de (15) s'annule, et nous voilà arrivés à une contradiction.

En résumé, le système d'équations (4) fait correspondre à tout élément (x_k') un élément bien déterminé (x_k), et le système (10) à tout élément (y_k'') un élément bien déterminé (y_k). Ces correspondances sont distributives, ce qui suit immédiatement de l'unicité des solutions. Les inégalités (15) et (16) montrent que nos deux correspondances sont aussi bornées. Par conséquent, ce sont des substitutions linéaires, et, d'après la manière dont elles furent définies, elles représentent les substitutions A^{-1} et $\mathfrak{A}^{-1}$ dont il fallait prouver l'existence.

61. Les termes $a_{ik}^{(-1)}$ du tableau $(a_{ik}^{(-1)})$ qui correspond aux substitutions A^{-1} et $\mathfrak{A}^{-1}$, se calculent au moyen du système (4) [ou aussi de (10)]; $a_{ik}^{(-1)}$ est la valeur de x_k tirée de (4), après y avoir

posé $x_i = 1$, $x_j = 0$ pour $j \neq i$. Ayant déterminé les $a_{ik}^{(-1)}$ de cette façon, A^{-1} et $\mathfrak{A}^{-1}$ seront représentées par les formules

$$x_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^{(-1)} x'_i \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(-1)} y'_k \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

La formule (40) du Chapitre précédent fournit pour les $a_{ik}^{(-1)}$:

$$a_{ik}^{(-1)} = - \lim_{n \to \infty} \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1,i-1} & \ldots & \alpha_{n,i-1} \\ \alpha_{1,i+1} & \ldots & \alpha_{n,i+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{n,n} \\ \bar{a}_{1i} & \ldots & \bar{a}_{ni} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}},$$

où

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_{ik} a_{jk}.$$

Le critère que nous venons d'établir peut aussi être interprété comme il suit. Il s'agit des deux hermitiens infinis

$$(17) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right|^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} x_i \right|^2,$$

qui figurent respectivement dans les inégalités (13) et (14). Ces inégalités expriment *que les deux hermitiens* (17) *restent* $\geq m^2 > 0$ *pour tous les éléments* (x_k) *tels que*

$$(18) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = 1.$$

Lorsqu'il en est ainsi, la substitution A *admet une réciproque* A^{-1} *et les limites inférieures qui correspondent aux deux hermitiens* (17), *variés sous la condition* (18), *sont égales entre*

elles; la valeur récidroque de leur racine carrée donne la borne $M_{A^{-1}}$.

62. Le critère que nous venons de former apparaît ici comme une conséquence particulière des résultats généraux du Chapitre précédent. Mais dans l'ordre historique, il fut découvert par M. Tœplitz, indépendamment de cette théorie générale et même avant que cette théorie fût développée [1]. Une autre démonstration, très simple et intéressante, est due à M. Hilb [2]. Mais ces deux démonstrations ne semblent pas susceptibles d'être étendues à des cas plus généraux, tandis que notre démonstration s'étend immédiatement à $p \geqq 1$ quelconque.

Pour nous approcher de l'ordre d'idées de M. Tœplitz, réduisons d'abord le fait à démontrer à un autre. Il s'agissait jusqu'ici d'une substitution linéaire quelconque A. Or, désignons par b_{ik} et c_{ik} les coefficients du terme $x_i \bar{x}_k$ dans les hermitiens (17) et envisageons les substitutions B et C qui correspondent aux tableaux (b_{ik}), (c_{ik}). Ces tableaux sont déjà d'un type bien particulier, leurs éléments étant les coefficients de deux hermitiens positifs.

Or, on a $B = \mathfrak{A}\bar{A}$, $C = A\bar{\mathfrak{A}}$, en désignant par $\bar{A}$ et $\bar{\mathfrak{A}}$ les deux substitutions qui correspondent au tableau $(\overline{a_{ik}})$. Lorsque A admet la réciproque A^{-1}, B et C admettent évidemment les réciproques $B^{-1} = \overline{A^{-1}}\mathfrak{A}^{-1}$, $C^{-1} = \overline{\mathfrak{A}^{-1}}A^{-1}$. Inversement, lorsque B et C admettent des réciproques B^{-1}, C^{-1}, la réciproque A^{-1} existe aussi; elle est fournie soit par $\overline{B^{-1}}\bar{\mathfrak{A}}$, soit par $\bar{\mathfrak{A}}C^{-1}$. Car on a

$$(\overline{B^{-1}}\bar{\mathfrak{A}})A = \overline{B^{-1}}(\bar{\mathfrak{A}}A) = \overline{B^{-1}}\bar{B} = E, \quad A(\bar{\mathfrak{A}}C^{-1}) = (A\bar{\mathfrak{A}})C^{-1} = CC^{-1} = E,$$
$$\overline{B^{-1}}\bar{\mathfrak{A}} = \overline{B^{-1}}\bar{\mathfrak{A}}CC^{-1} = \overline{B^{-1}}\bar{\mathfrak{A}}A\bar{\mathfrak{A}}C^{-1} = E\bar{\mathfrak{A}}C^{-1} = \bar{\mathfrak{A}}C^{-1}.$$

Donc, tout revient à démontrer la proposition suivante : *Lorsque*

---

(1) Tœplitz, *Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen* (*Nachrichten d. Ges. d. Wiss., Göttingen*, 1907, p. 101-109).

(2) Hilb, *Ueber die Auflösung von Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten* (*Sitzungsberichte d. Phys.-Med. Sozietät, Erlangen*, 1908, p. 84-89).

(x_k) variant sous la condition (18), *l'hermitien*

$$(19)\qquad B(x, \bar{x}) = \sum_{i,k=1}^{\infty} b_{ik} x_i \bar{x}_k$$

a une limite inférieure $J > 0$, *la substitution linéaire* $B = (b_{ik})$ *admet une réciproque* B^{-1}.

Dans ce but, considérons les *réduites*

$$(20)\qquad [B(x, \bar{x})]_n = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} x_i \bar{x}_k$$

de l'hermitien B. Variées sous la condition

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = 1,$$

elles admettent des limites inférieures J_n. Ces quantités J_n restent évidemment $\geqq J$. D'ailleurs, elles forment manifestement une suite monotone décroissante, et l'on prouve aussi aisément que cette suite tend vers J. Mais ce fait n'interviendra pas dans notre raisonnement. Le fait essentiel est que les J_n restent, pour tous les n, au-dessus d'une borne inférieure positive.

Envisageons maintenant la substitution linéaire à n variables B_n, formée avec les coefficients $b_{ik}(i, k = 1, 2, \ldots n)$. Pour B_n, l'analogue de la proposition actuelle suit immédiatement de la théorie des déterminants. Comme $J_n > 0$, le système homogène

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ik} x_i = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

n'admet pas d'autre solution que $x_1 = \ldots = x_n = 0$; donc, le déterminant $|b_{ik}|_n$ ne s'annule pas. Par conséquent, la substitution B_n admet une réciproque bien déterminée B_n^{-1}; les coefficients de cette réciproque s'expriment d'une façon bien connue à l'aide du déterminant $|b_{ik}|_n$ et de ses mineurs. La borne de la substitution B_n^{-1} est $\frac{1}{J_n}$ [1].

---

[1] Dans le but que nous poursuivons, il suffit de s'assurer que cette borne

Faisons croître n indéfiniment; les coefficients des substitutions B_n^{-1} tendront vers des limites bien déterminées $b_{ik}^{(-1)}$, et le tableau $(b_{ik}^{(-1)})$ donnera lieu à une substitution linéaire B^{-1}, qui sera la réciproque de B. Sommairement, dans le cas considéré, *le principe des réduites s'applique*.

Tout cela suit immédiatement des principes posés dans le Chapitre précédent, en particulier des théorèmes établis dans les n[os] 40 et 42. Il serait aussi bien facile de donner une démonstration directe conforme à ces principes. Mais ces détails nous éloigneraient beaucoup de l'ordre d'idées de M. Tœplitz qu'il s'agit d'exposer. M. Tœplitz se place au point de vue de l'Algèbre pure; il en tire tout son possible et il ne se sert des algorithmes illimités qu'au moment où la puissance des méthodes algébriques est épuisée.

Il y en a, en effet, une classe considérable de substitutions linéaires dont l'inversion s'aborde, quant au calcul des coefficients, par des algorithmes *limités*. Envisageons une substitution linéaire D telle que, quel que soit n, x'_n ne dépende que de $x_1, \ldots, x_n$. Dans le tableau (d_{ik}) qui y correspond, les éléments à droite de la diagonale s'annulent. Lorsque la réciproque D^{-1} d'une telle substitution existe, le calcul de ses coefficients n'exige que la résolution de certains systèmes linéaires à un nombre fini d'inconnues; en effet, les coefficients de D_n^{-1} le sont aussi pour D^{-1}.

Mais il y a encore un autre problème qui n'exige que l'emploi de certains algorithmes limités. Le voici : décomposer la substitu-

---

supérieure $\leq \frac{1}{J_n}$. Car il s'agit seulement de voir que la borne supérieure ne croît pas indéfiniment avec n. Or, si l'on se contente de démontrer cette inégalité au lieu de l'égalité exacte, il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Lagrange, ce qui donne

$$J_n^2\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^2 \leq \left(\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}x_i\bar{x}_k\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\bar{x}_k\right|^2 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\sum_{i=1}^{n}|x'_i|^2,$$

d'où

$$\frac{\sum |x_i|^2}{\sum |x'_i|^2} \leq \frac{1}{J_n^2}.$$

tion B en $B = D\bar{\mathfrak{T}}$, de sorte que D soit une substitution du type que nous venons de considérer et $\bar{\mathfrak{T}}$ sa transposée [1]. En effet, on obtient successivement les coefficients d_{ik} en décomposant d'une façon analogue les substitutions B_n.

Dans cet ordre d'idées, l'inversion de B revient à faire d'abord la décomposition $B = D\bar{\mathfrak{T}}$, puis à déterminer D^{-1}, et enfin (ce sera seulement ici que l'on se servira des algorithmes illimités) à former le produit $\bar{\mathfrak{T}}^{-1}D^{-1}$. Ce produit fournira évidemment la réciproque B^{-1}. On suppose, bien entendu, que tous ces calculs conduisent à des substitutions bornées et alors linéaires; ce qu'il est très facile de démontrer.

Les coefficients de D^{-1} se calculent aussi en décomposant, au lieu des B_n, leurs réciproques B_n^{-1}; c'est précisément ce que fait M. Tœplitz. Désignons par Δ_n le déterminant formé en prenant les n premières lignes et les n premières colonnes du tableau (b_{ik}). Soient $\binom{i}{k}_n$ les mineurs du premier ordre de ce déterminant. Posons

$$d_{11}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{b_{11}}}, \quad d_{ik}^{(-1)} = \frac{\binom{i}{k}_i}{\sqrt{\Delta_{i-1}\Delta_i}} \quad \text{pour } i \geqq k > 1, \quad d_{ik}^{(-1)} = 0 \quad \text{pour } i < k;$$

soient D_1^{-1}, D_2^{-1}, ... les substitutions à 1, 2, ... variables formées avec les coefficients $d_{ik}^{(-1)}$; on aura, d'après une identité qui remonte à Lagrange,

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{i} d_{ik}^{(-1)} x_k \right|^2 = \frac{1}{\Delta_n} \sum_{i,k=1}^{n} \binom{i}{k}_n x_i \bar{x}_k,$$

c'est-à-dire $\bar{\mathfrak{T}}_n^{-1} D_n^{-1} = B_n^{-1}$.

63. Contrairement à la méthode que nous venons d'esquisser, celle de M. Hilb appartient à l'Analyse. Elle repose sur l'étude de la série

$$(21) \qquad E + A + A^2 + A^3 + \dots;$$

---

[1] Les systèmes d'équations qui correspondent aux substitutions du type $\mathfrak{T}$, ont la forme particulière considérée au n° 12. Nous invitons le lecteur à examiner si l'on peut appliquer ici la méthode y indiquée, savoir le principe des réduites.

nous y désignons par $A^2, A^3, \ldots$ les puissances de la substitution A, c'est-à-dire les substitutions réitérées

$$A^2 = AA, \qquad A^3 = AA^2 = A^2A = AAA, \qquad \ldots.$$

Au premier abord, la série (21) n'est qu'un développement formel de $(E - A)^{-1}$, analogue à celui de $(1 - z)^{-1}$ en série entière.

M. Hilb se sert du fait suivant : tant que $M_A < 1$, la série (21) converge et fournit la réciproque de $E - A$. Pour le moment, nous ne précisons pas le sens de cette assertion ; nous y reviendrons plus tard d'une façon détaillée. Contentons-nous de dire qu'elle implique, entre autres, le fait que les coefficients des substitutions $S_n = E + A + \ldots + A^{n-1}$ convergent, pour n infini, vers des limites bien déterminées s_{ik} et que ces quantités s_{ik} sont précisément les coefficients de la réciproque cherchée.

Rappelons donc le théorème à démontrer : Lorsque l'hermitien positif (19) a une limite inférieure $J > 0$, la substitution B qui y correspond admet une réciproque B^{-1}. Or, posons (α désignant une constante numérique positive) $B = \frac{1}{\alpha}[E - (E - \alpha B)]$; il en résultera le développement formel

$$B^{-1} = \alpha[E + (E - \alpha B) + (E - \alpha B)^2 + \ldots].$$

D'après ce qui précède, tout revient à déterminer la constante α de sorte que $M_{E-\alpha B} < 1$. Mais $M^2_{E-\alpha B}$ est la limite supérieure de l'hermitien

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| x_i - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} x_k \right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 - 2\alpha \sum_{i,k=1}^{\infty} b_{ik} \bar{x}_i x_k + \alpha^2 \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} x_k \right|^2,$$

les x_k variant sous la condition (18). Par suite, on a

$$M^2_{E-\alpha B} \leq 1 - 2\alpha J + \alpha^2 M^2_B,$$

et comme $J > 0$, le second membre de l'inégalité reste < 1 pour

$$0 < \alpha < \frac{2J}{M^2_B} \quad (^1).$$

Donc, toute valeur telle de α peut servir à déterminer B^{-1}.

---

(1) On peut obtenir, par une discussion un peu plus profonde, la borne

64. Insistons encore un moment sur le fait qui servit de point de départ à M. Hilb et qui nous sera encore utile dans la suite. C'était le fait suivant : *Lorsque* $M_A < 1$, *la substitution* $E - A$ *admet une réciproque.* Nous avons vu comment on déduit de ce fait les critères de M. Tœplitz. Mais, d'autre part, ces critères généraux doivent évidemment comprendre la condition particulière $M_A < 1$. En effet, quant à ces critères, il s'agit des bornes inférieures des hermitiens

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| x_i - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right|^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} x_i \right|^2.$$

En appliquant l'inégalité (7) du Chapitre précédent, on trouve

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| x_i - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right|^2 \geqq \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$$
$$\geqq (1 - M_A)^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2.$$

On a de même

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} x_i \right|^2 \geqq (1 - M_A)^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2.$$

Par conséquent, les bornes en question sont $\geqq 1 - M_A$ et elles ne peuvent s'annuler que si $M_A \geqq 1$. C'est-à-dire, dans le cas où $M_A < 1$, les conditions de M. Tœplitz sont remplies; donc, $E - A$ admet une réciproque $(E - A)^{-1}$ et l'on a

$$M_{(E-A)^{-1}} \leqq \frac{1}{1 - M_A}.$$

LES SUBSTITUTIONS COMPLÈTEMENT CONTINUES.

65. Nous venons de former les critères pour que la substitution A admette une réciproque A^{-1}. Tant que nos condi-

---

exacte $\frac{2}{M_B}$. Notre développement converge pour toute valeur plus petite de α : elle cesse à converger lorsqu'on pose $\alpha = \frac{2}{M_B}$. La convergence deviendra la plus rapide possible pour $\alpha = \frac{1}{1 - M_B}$; le sens de cette assertion est facile à préciser.

tions sont remplies, les systèmes (4) et (10) ont des solutions uniques, et l'on obtient ces solutions en appliquant respectivement aux éléments (x'_k), (x'_k) les substitutions A^{-1}, $\mathfrak{A}^{-1}$. Jusqu'à ce point, nos substitutions se comportent tout comme s'il s'agissait d'un nombre fini de variables. Qu'est-ce qui arrive pour les systèmes (4) et (10) lorsque la réciproque n'existe pas? Rappelons les résultats principaux qui portent sur le cas d'un nombre fini de variables. Dans ce cas, lorsque la réciproque n'existe pas, chacun des systèmes homogènes

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

admet une ou plusieurs solutions. Soit, pour fixer les idées, (x_i^0) une solution du second système; pour que le système non homogène

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = x'_i$$

ait une solution, il faut évidemment avoir

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i x_i^0 = 0.$$

Lorsque (x'_k) est tel que cette dernière relation est remplie pour toute solution (x_i^0) du système homogène à droite, le système non homogène admet des solutions. Les deux systèmes homogènes admettent le même nombre de solutions indépendantes.

Est-ce que ces résultats très simples subsistent dans le cas d'une infinité de variables? Il n'en est rien. Voici quelques exemples : la substitution $x'_k = x_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ n'a pas de réciproque. Malgré cela, les deux systèmes homogènes auxquels elle donne lieu, savoir :

$$x_k = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots); \qquad x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

ne sont pas de même type; tandis que le premier sera satisfait par x_1 quelconque, $x_2 = x_3 = \ldots = 0$, le second n'admet évidemment que la solution triviale $x_1 = x_2 = \ldots = 0$. La substi-

tution $x'_k = \frac{1}{k} x_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) n'a pas de réciproque; car cette réciproque ferait correspondre à $x_k = \frac{1}{k}$ les valeurs $x_k = 1$, et $\Sigma |x_k|^2$ ne convergerait pas. D'autre part, les deux systèmes homogènes qui y correspondent n'admettent que la solution $x_1 = x_2 = \ldots = 0$. Les deux systèmes homogènes qui correspondent à la substitution $x'_k = \frac{1}{k} x_1$ ($k = 1, 2, \ldots$) admettent tous les deux une infinité de solutions indépendantes.

66. Cependant, il y a une vaste catégorie de substitutions linéaires à une infinité de variables, auxquelles les résultats indiqués s'étendent. Si par exemple, la série double $\sum_{i,k} |a_{ik}|^2$ converge, la substitution E — A se comportera de la manière exigée, comme on s'en rend compte en appliquant la méthode des déterminants infinis. D'ailleurs, c'est seulement un cas particulier du cas que nous allons étudier, en supposant la substitution A d'être *complètement continue.*

Expliquons ce que l'on entend par cette dernière expression.

Toute substitution linéaire est, par définition, continue, c'est-à-dire lorsqu'une suite d'éléments tend vers un élément limite, la suite correspondante tend vers l'élément qui correspond à cet élément limite. C'est vrai pour la convergence au sens ordinaire (n° 55) et reste vrai quand on définit la continuité moyennant la convergence *forte* (n° 57). C'est-à-dire, dans le cas général, à la convergence correspond de nouveau la convergence et à la convergence forte, la convergence forte. La substitution linéaire A sera dite *complètement continue*, lorsqu'elle fait correspondre à chaque suite $(x_k^{(n)})$ ($n = 1, 2, \ldots$), tendant de n'importe quelle façon vers un élément limite (x_k), une suite $(x_k^{(n)\prime})$ qui tend *fortement* vers l'élément (x'_k) [1].

---

[1] Dans la théorie de M. Hilbert la forme bilinéaire $A(x, y)$ est dite être complètement continue (*vollstetig*) si

$$(x_k^{(n)}) \to (x_k), \quad (y_k^{(n)}) \to (y_k)$$

entraînent

$$A(x^{(n)}, y^{(n)}) \to A(x, y).$$

La définition du texte et celle de M. Hilbert sont liées par le fait que chaque

Pour avoir des exemples très simples, qui montrent nettement la nature de la restriction imposée aux substitutions complètement continues, considérons les formules $x'_k = a_k x_k$ ($k = 1, 2, \ldots$). Toutes les fois que les quantités a_k sont bornées dans leur ensemble (et dans ce cas seulement), nos formules définissent des substitutions bornées et alors continues. Mais la substitution définie ne devient complètement continue que si, pour $k \to \infty$, les $a_k \to 0$.

En particulier, la substitution E n'est pas complètement continue. De plus, il découle immédiatement de notre définition que si l'une au moins des deux substitutions A et B est complètement continue, le produit AB l'est aussi. On en conclut que les substitutions complètement continues ne peuvent admettre des réciproques. En fait, dans le cas contraire, la substitution $E = AA^{-1}$ serait complètement continue.

Si, sauf une seule ligne ou une seule colonne, tous les coefficients de A s'annulent, A est évidemment complètement continue. De plus, si $A, B, \ldots, H$ sont complètement continues, $A + B + \ldots + H$ l'est aussi. On en conclut que s'il existe un nombre m tel que $a_{ik} = 0$ pour tous les i, $k > m$, A est complètement continue.

67. Nous allons étudier les systèmes d'équations qui correspondent à la substitution $E - A$ en supposant A complètement continue.

---

tableau (a_{ik}) qui correspond à une substitution complètement continue, donne aussi lieu à une forme bilinéaire complètement continue et inversement. Ce fait découle immédiatement de la proposition suivante : Soient donnés (u_k) et la suite des éléments $(u_k^{(n)})$ appartenant à l'espace hilbertien; alors *pour que la relation*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(n)} x_k^{(n)} \to \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k$$

ait lieu pour chaque élément (x_k) *et pour chaque suite* $(x_k^{(n)})$ *tendant vers* (x_k), *il faut et il suffit que la suite* $(u_k^{(n)})$ *tende fortement vers* (u_k). [*Cf.* la remarque faite à propos de la formule (28) du Chapitre III; le fait y indiqué implique la suffisance de la condition énoncée.]

La correspondance entre substitutions et formes complètement continues met en évidence que, si A est complètement continue, la transposée Ɐ le sera également.

Cette étude pourrait être rattachée aux raisonnements généraux du Chapitre précédent et, en particulier, à la théorie de M. Schmidt. Je préfère exposer ici une méthode particulière qui est une sorte de généralisation des raisonnements du n° 25. Cette méthode semble être inventée par M. A. C. Dixon (¹) qui l'appliquait à l'étude des substitutions portant sur les systèmes (x_k) tels que les $|x_k|$ sont bornés (²). La méthode de M. Dixon, peu modifiée, nous servira à étudier les substitutions que nous envisageons.

Étant donnée la substitution A aux coefficients a_{ik}, soit R_n la substitution qui correspond au tableau (a_{ik}) où l'on a remplacé par des zéros les éléments des n premières lignes et aussi ceux des n premières colonnes. Soit M_{R_n} sa borne supérieure. Quand n varie en croissant, les quantités M_{R_n} décroissent, ou au moins ne croissent pas, c'est évident. Mais lorsqu'on suppose la substitution A complètement continue, on peut affirmer beaucoup plus : dans cette hypothèse,

$$M_{R_n} \to 0.$$

En effet, pour chaque valeur de n, il existe un élément $(x_k^{(n)})$ tel que $x_1^{(n)} = \ldots = x_n^{(n)} = 0$, $\sum |x_k^{(n)}|^2 = 1$, et que, de plus, l'hermitien

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{ik} x_k \right|^2$$

(¹) DIXON, *On a classe of matrices of infinite order and on the existence of « matricial » functions on a Riemann surface*, received 15 mai 1901 (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. XIX, p. 190-233).

(²) Quant aux coefficients a_{ik}, M. Dixon suppose qu'il existe des constantes α_k, de sorte que $|a_{ik}| \leq \alpha_k$ et que $\Sigma\alpha_k$ converge. Il suffirait aussi d'imposer aux a_{ik} la condition moins restrictive que les quantités $A_i = \sum_k |a_{ik}|$ tendent vers zéro pour $i \to \infty$.

Je profite de l'occasion pour dire quelques mots sur les substitutions qui portent sur les systèmes (x_k) tels que les $|x_k|$ sont bornés. Par analogie, on y définira la convergence par $x_k^{(n)} \to x_k$ et la condition que tous les $|x_k^{(n)}|$ soient bornés dans leur ensemble. La convergence forte sera celle où $x_k^{(n)}$ tend uniformément vers x_k. Ces conventions faites, les tableaux (a_{ik}) qui correspondent aux substitutions linéaires seront caractérisés par le fait que les quantités $A_i = \sum_k |a_{ik}|$ restent bornées, et les substitutions complètement continues pour $A_i \to 0$.

y atteint à $\frac{1}{n}$ près sa borne supérieure $M^2_{R_n}$. Or la suite des (x_k^{n}) tend, pour n infini, vers l'élément (o); par conséquent, la suite $(x_k^{(n)\prime})$ qui y correspond, tendra vers (o) d'une façon forte. En formule

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_{ik}x_k^{n}\Big|^2 \to 0.$$

Cette formule et l'inégalité

$$M^2_{R_n} - \frac{1}{n} \leqq \sum_{i=n+1}^{\infty}\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_{ik}x_k^{n}\Big|^2 \leqq \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^{\infty}\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_{ik}x_k^{n}\Big|^2$$

donnent $M_{R_n} \to 0$.

En particulier, on aura pour n assez grand

$$M_{R_n} < 1.$$

Supposons que l'on ait choisi n de cette façon. Donc, d'après le lemme du n° 64, la substitution $E - R_n$ admet une réciproque. Posons

$$(E - R_n)^{-1} = E + B;$$

la substitution B ainsi définie sera, à certain égard, du même type que R_n, savoir : les n premières lignes et les n premières colonnes du tableau (b_{ik}) ne contiendront que des zéros.

68. Pour simplifier le calcul, décomposons A de la façon suivante : $A = A_n + P_n + Q_n + R_n$. A_n désigne la substitution qui a les mêmes coefficients que A pour $i \leqq n$, $k \leqq n$, et dont les autres coefficients s'annulent. P_n a les mêmes coefficients que A pour $i \leqq n$, $k > n$; les autres coefficients de P_n s'annulent. Q_n a les mêmes coefficients que A pour $i > n$, $k \leqq n$; les autres s'annulent. La substitution R_n vient d'être définie. Enfin, désignons par E_n la substitution $x'_k = x_k$ pour $k \leqq n$, $x'_k = 0$ pour $k > n$.

En multipliant l'identité $E = (E + B)(E - R_n)$ par P_n, il vient

$$P_n = P_n(E + B)(E - R_n).$$

Ajoutons aux deux membres $E_n - A_n - P_n - P_n(E + B)Q_n$: il

viendra

$$(22)\qquad E_n - A_n - P_n(E+B)Q_n = E_n - A_n - P_n + P_n(E+B)(E - Q_n - R_n).$$

Pour interpréter l'identité obtenue, désignons par (x'_k) l'élément qui résulte de (x_k), quand on y applique $E - A$. Appliquer à (x_k) la substitution $E_n - A_n - P_n$, revient à appliquer à (x'_k) la substitution E_n. Appliquer $P_n(E+B)(E-Q_n-R_n)$ à (x_k) équivaut à appliquer à (x'_k) la substitution $P_n(E+B)$. Donc, la substitution qui figure au second membre de (22), appliquée à (x_k), équivaut à $E_n + P_n(E+B)$, mais portant sur (x'_k). Posons, pour simplifier l'écriture,

$$E_n - A_n - P_n(E+B)Q_n = C, \qquad E_n + P_n(E+B) = D;$$

alors, C appliquée à (x_k) et D appliquée à (x'_k) conduiront à des résultats égaux.

Ajoutons que la substitution C peut aussi être envisagée comme substitution à n variables, puisque ses coefficients s'annulent pour $i > n$ et aussi pour $k > n$.

Or, le calcul symbolique que nous venons de faire permet de ramener le système d'équations

$$(23)\qquad x_i - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = x'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

aux inconnues x_k, en nombre infini, à un autre ne contenant que les n premières de ces inconnues. Mettons à part, pour l'instant, les n premières des équations et mettons les autres sous la forme

$$x_i - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{ik} x_k = x'_i + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i = n+1, n+2, \ldots).$$

Ce dernier système se résout, suivant les inconnues x_{n+1}, x_{n+2}, ..., moyennant les formules

$$x_i = x'_i + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + \sum_{j=n+1}^{\infty} b_{ij}\left(x'_j + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k\right),$$

où l'on a désigné par b_{ik} les coefficients de la substitution B. En portant ces expressions dans les équations mises à part, on arrive

à éliminer les inconnues $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ et l'on obtient le système suivant :

$$(24) \qquad \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k = \sum_{j=1}^{\infty} d_{ij} x'_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où c_{ik} et d_{ij} désignent les coefficients des substitutions C et D que nous venons de définir.

Un procédé analogue conduira à transformer le système

$$(25) \qquad x_k - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} x_i = x'_k,$$

correspondant à la substitution transposée $E - \mathfrak{A}$, dans le suivant :

$$(26) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_{ik} x_i = \sum_{j=1}^{\infty} d'_{jk} x'_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Quant aux quantités d'_{jk}, qui se calculent d'une façon analogue aux d_{ik} [ce sont les coefficients de la substitution $E_n + (E + B) Q_n$], elles nous intéressent peu pour le moment. Toute notre attention doit être portée sur les coefficients qui interviennent dans les premiers membres; ce sont les mêmes que ceux du système (24). En effet, ce sont les coefficients de la substitution $E_n - \mathfrak{A}_n - \mathfrak{Q}_n (E + \mathfrak{B}) Q_n$ qui est la transposée de C.

Ainsi l'étude des systèmes (23) et (25) est ramenée à celle de (24) et (26); c'est-à-dire que l'étude de la substitution $E - A$, à une infinité de variables, revient à celle de la substitution C_n, à n variables, qui correspond au tableau (c_{ik}).

69. Il faut distinguer deux cas :

Premier cas. — Le déterminant $|c_{ik}|_n$ ne s'annule pas.

Dans cette hypothèse, la substitution C_n admet une réciproque C_n^{-1}. Celle-ci peut aussi être envisagée comme une substitution à une infinité de variables, en posant, par définition, égaux à zéro tous les coefficients qui manquent. Quant à la résolution du système (23), la substitution $C_n^{-1} D$, appliquée à l'élément (x'_i), fournira les vraies valeurs de $x_1, \ldots, x_n$ et donnera zéro pour les autres x_k. Pour calculer les vraies valeurs de ces

dernières inconnues, on reprendra leur expression moyennant $x_1, \ldots, x_n$; $x'_1, x'_2, \ldots$. En y portant les valeurs obtenues pour $x_1, \ldots, x_n$, on voit que la substitution

$$E - E_n - B - Q_n C_n^{-1} D + BQ_n C_n^{-1} D,$$

appliquée à l'élément (x'_i), fournit les vraies valeurs de x_{n+1}, $x_{n+2}, \ldots$. D'autre part, cette dernière substitution donne

$$x_1 = \ldots = x_n = 0.$$

Donc, la substitution

$$E - E_n - B + C_n^{-1} D - Q_n C_n^{-1} D + BQ_n C_n^{-1} D,$$

appliquée à (x'_i), donnera précisément la solution (x_k) du système (23). En formule

$$(27) \quad (E - A)(E - E_n - B + C_n^{-1} D - Q_n C_n^{-1} D + BQ_n C_n^{-1} D) = E;$$

cette formule peut aussi être vérifiée par un calcul symbolique facile à exécuter.

Des considérations analogues, portant sur les systèmes (25) et (26), conduisent à déterminer une substitution $\mathfrak{F}$ telle que

$$(E - \mathfrak{A})\mathfrak{F} = E.$$

Or, on n'a pas besoin de calculer $\mathfrak{F}$ d'une façon détaillée. Il suffit de remarquer qu'elle existe, et l'on en conclura que la substitution E — A admet une réciproque et que cette réciproque est fournie par la substitution

$$E - E_n - B + C_n^{-1} D + Q_n C_n^{-1} D + BQ_n C_n^{-1} D$$

que nous venons de calculer. En effet, soit F la transposée de $\mathfrak{F}$; on aura

$$F(E - A) = E;$$

donc, en multipliant par F les deux membres de (27), il vient

$$E - E_n - B - C_n^{-1} D - QC_n^{-1} D + BQC_n^{-1} D = F$$

et, par conséquent,

$$(E - E_n - B + C_n^{-1} D - QC_n^{-1} D - BQC_n^{-1} D)(E - A) = E.$$

Second cas. — Le déterminant $|c_{ik}|_n$ s'annule.

Dans ce cas, chacun des deux systèmes homogènes

$$(28)\qquad \sum_{k=1}^{n} c_{ik}x_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, n); \qquad \sum_{i=1}^{n} c_{ik}x_i = 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$$

admet le même nombre m de solutions indépendantes. Soient

$$x_1 = \alpha_1^1, \quad \ldots, \quad x_n = \alpha_n^1; \quad x_1 = \alpha_1^m, \quad \ldots, \quad x_n = \alpha_n^m,$$

m solutions indépendantes du premier système;

$$x_1 = \beta_1^1, \quad \ldots, \quad x_n = \beta_n^1; \quad x_1 = \beta_1^m, \quad \ldots, \quad x_n = \beta_1^m,$$

m solutions indépendantes du second. Toute solution du premier système s'exprime par une combinaison linéaire et homogène des solutions α et toute solution du second système est combinaison des solutions β.

Passons aux systèmes homogènes infinis, qui résultent de (23) et de (25), en y posant l'élément donné $= (0)$. Soit (x_k^0) une solution de l'un ou l'autre des deux systèmes; $x_1^0, \ldots, x_n^0$ sera évidemment une solution du système (28) correspondant. Inversement, lorsqu'on se donne $x_1^0, \ldots, x_n^0$ et que ces valeurs satisfont à l'un ou l'autre des systèmes (28), le système infini correspondant admet une solution (x_k) telle que $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$. Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse du système homogène (23). Alors, $x_1^0, \ldots, x_n^0$ étant une solution du premier système (28), les inconnues $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ résultent des équations

$$x_i - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{ik}x_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k^0 \qquad (i = n+1, \ldots),$$

qui les déterminent d'une façon univoque. On les obtient en appliquant à l'élément $x_1^0, \ldots, x_n^0, 0, 0, \ldots$ la substitution $(E+B)Q_n$. Donc, toute solution du système homogène infini se déduit d'une solution correspondante du système fini (complétée par des zéros), en y appliquant la substitution

$$E_n + (E+B)Q_n.$$

Mais c'est précisément la substitution qui correspond au tableau (d'_{ik}), c'est-à-dire que si l'on désigne par $x_1^0, \ldots, x_n^0$ la

solution générale du système fini, la solution générale (x_k^0) du système infini s'exprime par

$$x_i^0 = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} x_k^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

En particulier, appliquons notre procédé aux solutions α : on obtiendra m solutions du système homogène infini (23). Nous les désignerons par $(\alpha_k^{(j)})$ $(j = 1, \ldots, m)$. Or, chaque solution $x_1^0, \ldots, x_n^0$ du premier système (28) peut être envisagée comme combinaison linéaire des solutions α; donc la solution du système infini qui en découle sera la même combinaison des solutions $(\alpha_k^{(j)})$.

En résumé, *toutes les solutions du système homogène infini* (23) *sont des combinaisons linéaires de m solutions particulières, linéairement indépendantes entre elles, et il en est de même quant au système homogène* (25).

Passons aux systèmes non homogènes. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de résoudre le système (25). Le passage de (25) à (26) peut être toujours exécuté, sans qu'il faille faire aucune hypothèse sur l'élément donné (x''). Quant au système (26), pour qu'il puisse être résolu, il faut et il suffit que la relation

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} d'_{jk} x''_j \right) x_k^0 = 0$$

ait lieu pour chaque solution $x_1^0, \ldots, x_n^0$ du premier système homogène (28). Cette relation s'écrit aussi comme suit

$$\sum_{j=1}^{\infty} x''_j \left(\sum_{k=1}^{n} d'_{jk} x_k^0 \right) = \sum_{j=1}^{\infty} x''_j x_j^0 = 0.$$

Mais (x_j^0) représente la solution générale du système infini homogène (23). Donc, la condition nécessaire et suffisante pour que le système (25) puisse être résolu, consiste en ce que la relation

$$\sum_{k=1}^{\infty} x''_k x_k^0 = 0$$

ait lieu pour chaque solution (x_k^0) du système homogène (23).

Lorsque (x''_k) est choisie de cette façon, le système (25) admet évidemment plusieurs solutions; la solution générale se déduit de l'une quelconque des solutions particulières, en y ajoutant une combinaison linéaire à coefficients arbitraires des m éléments $(\beta_k^{(i)})$.

Des résultats analogues portent sur le système non homogène (23).

En résumé, *lorsque la substitution* A *est complètement continue, les systèmes infinis* (23) *et* (25) *conservent les propriétés essentielles des systèmes finis qui contiennent le même nombre d'équations que d'inconnues.*

Faisons encore remarquer que l'hypothèse que A est complètement continue ne nous servit que pour en conclure que, pour n suffisamment grand, $M_{R_n} < 1$. Donc, tous nos résultats subsistent, quand on suppose seulement que A jouisse de cette dernière propriété.

70. Les considérations précédentes permettent aussi d'introduire un paramètre variable λ et d'étudier la réciproque $(E - \lambda A)^{-1}$ en fonction de ce paramètre. Supposons que λ varie dans un cercle ayant pour centre l'origine et de rayon r. Quand A est complètement continue, on peut choisir n de sorte qu'on ait $M_{R_n} < \frac{1}{r}$. Cela étant, la substitution $E - \lambda R_n$ admettra pour chaque valeur envisagée de λ une réciproque $E + B(\lambda)$; les coefficients de la substitution $B(\lambda)$ dépendent de λ et ils en sont des fonctions holomorphes pour $|\lambda| \leq r$. Il en sera de même pour les coefficients des substitutions $C(\lambda)$, $C_n(\lambda)$, $D(\lambda)$ qui correspondent à C, C_n et D. Or, le calcul de la réciproque $C_n^{-1}(\lambda)$ de $C_n(\lambda)$ se fait moyennant des déterminants d'ordre fini qui alors seront aussi des fonctions holomorphes; et comme une fonction holomorphe dans un domaine (frontière inclue) n'y admet qu'un nombre fini de racines, la réciproque $C_n^{-1}(\lambda)$ existe pour toute valeur envisagée de λ, sauf peut-être un nombre fini d'entre elles. De plus, si $C_n^{-1}(\lambda_0)$ n'existe pas, $C_n^{-1}(\lambda)$ pourra être mise sous la forme $\frac{G(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^m}$, les coefficients de $G(\lambda)$ étant holomorphes pour $\lambda = \lambda_0$. Enfin, la formule

$$(E - \lambda A)^{-1} = E - E_n + B(\lambda) + C_n^{-1}(\lambda) D(\lambda)$$
$$+ \lambda Q_n C_n^{-1}(\lambda) D(\lambda) - \lambda B(\lambda) Q_n C_n^{-1}(\lambda) D(\lambda)$$

permet d'affirmer les mêmes faits pour $(E - \lambda A)^{-1}$: ces faits s'expriment sommairement en disant que la réciproque $(E - \lambda A)^{-1}$ est méromorphe en λ. Ce résultat est vrai pour toute valeur de λ, puisque le rayon r du cercle considéré peut être choisi arbitrairement.

Il convient d'observer que dans les cas qui se prêtent à la méthode des déterminants infinis, par exemple quand la série double $\Sigma |a_{ik}|^2$ converge, le résultat établi est une conséquence immédiate du fait que le déterminant infini, formé avec les éléments $e_{ik} - \lambda a_{ik}$, est une fonction holomorphe de λ.

SUITES ET SÉRIES DE SUBSTITUTIONS.

71. Au n° 63, en exposant la méthode de M. Hilb, nous avons dit que la série

$$(21) \qquad E + A + A^2 + \dots$$

converge, lorsque $M_A < 1$, vers la substitution $(E - A)^{-1}$. Mais nous n'avons pas démontré cette assertion; ni nous n'en avons même précisé le sens. Comblons cette lacune, en développant en même temps quelques généralités concernant les suites de substitutions.

Je me hâte d'observer que les raisonnements généraux qui suivent s'étendent immédiatement à d'autres passages à la limite, dépendant par exemple, au lieu d'un indice entier, d'un paramètre continu.

Étant donnée une suite indéfinie (A_n) de substitutions linéaires, désignons par $(a_{ik}^{(n)})$ les tableaux qui y correspondent. Supposons : 1° que les bornes M_{A_n} restent toutes inférieures à une quantité finie M; 2° que lorsque n croît indéfiniment, les suites $(a_{ik}^{(n)})$ tendent vers des valeurs limites a_{ik}.

Je dis que, dans ces hypothèses, les a_{ik} sont les coefficients d'une substitution linéaire A telle que

$$(22) \qquad M_A \leq M.$$

En effet, on a pour tout choix des entiers l et m et des quantités

$x_1, \ldots, x_m$,

$$\sum_{i=1}^{l}\left|\sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_k\right|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{l}\left|\sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{(n)} x_k\right|^2 \leqq M^2 \sum_{k=1}^{m} |x_k|^2;$$

et, d'après le n° 56, c'est précisément la condition pour que le tableau (a_{ik}) corresponde à une substitution A telle que (29).

Soit, de plus, (x_k) un élément quelconque ; soient $(x_k^{(n)})$, (x'_k) les éléments qu'on obtient en appliquant à (x_k) respectivement les substitutions A_n, A. D'après l'hypothèse 1°, on a pour tous les i et n

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}^{(n)}|^2 \leqq M^2;$$

et par conséquent, d'après le n° 40,

$$x_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} x_k \to \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = x'_i.$$

Comme, d'autre part, les sommes $\Sigma |x_k^{(n)}|^2$ restent toutes $\leqq M^2 \Sigma |x_k|^2$, on peut affirmer que la suite des éléments $(x_k^{(n)})$ tend, pour n infini, vers l'élément (x'_k), et cela, quel que soit l'élément (x_k) dont on est parti. C'est pourquoi nous dirons, que sous les hypothèses faites, *les substitutions A_n tendent vers la substitution* A.

72. La série (21) entre dans un type encore beaucoup plus spécial. Étant donnée de nouveau une suite indéfinie de substitutions (A_n), nous dirons qu'elle tend *uniformément* vers la substitution A lorsque

$$M_{A - A_n} \to 0.$$

Dans ce cas, les hypothèses 1° et 2° sont évidemment remplies; car la définition des M et l'inégalité (5) du n° 34 donnent immédiatement

$$M_{A_n} \leqq M_A + M_{A - A_n},$$

et, d'autre part, on a

$$|a_{ik} - a_{ik}^{(n)}| \leqq M_{A - A_n}.$$

Par conséquent, la suite (A_n) tend vers A aussi dans le sens que

nous avons donné antérieurement à cette expression. En particulier, la suite des éléments $(x_k^{(n)})$ tend vers l'élément (x'_k). Mais il y a plus. En fait, comme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x'_k - x_k^{(n)}|^2 \leq M_{A-A_n}^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2,$$

les $(x_k^{(n)})$ tendent *fortement* vers (x'_k); de plus, la convergence est *uniforme* pour tout domaine borné de l'espace hilbertien (c'est-à-dire pour tout domaine tel que $\Sigma |x_k|^2 \leqq G^2$).

Voici encore une autre particularité remarquable de la convergence uniforme : on a précisément

$$M_{A_n} \to M_A.$$

Ce fait découle immédiatement de l'inégalité

$$|M_A - M_{A_n}| \leq M_{A-A_n},$$

laquelle résulte évidemment de la définition des M et de l'inégalité (7) du n° 34.

Posons maintenant le problème suivant : Étant donnée une suite (A_n), il faut reconnaitre s'il existe ou non une substitution A vers laquelle (A_n) tend uniformément.

Une condition nécessaire pour que A existe découle de l'inégalité

$$M_{A_n-A_m} \leq M_{A-A_n} + M_{A-A_m};$$

cette condition consiste en ce que

$$M_{A_n-A_m} \to 0, \tag{30}$$

m et n tendant vers l'infini indépendamment l'un de l'autre.

Je dis que cette condition est aussi suffisante. En effet, supposons qu'elle soit remplie, alors les inégalités

$$|M_{A_n} - M_{A_m}| \leq M_{A_n-A_m}, \qquad |a_{ik}^{(n)} - a_{ik}^{(m)}| \leq M_{A_n-A_m}$$

nous assurent que les suites (M_{A_n}), $(a_{ik}^{(n)})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tendent vers des limites déterminées M et a_{ik}. Donc les hypothèses 1° et 2° du n° 71 sont remplies à plus forte raison; par conséquent, les a_{ik} sont les coefficients d'une substitution linéaire A et la suite (A_n) tend vers A. De même, toute suite $(A_n - A_m)$, où l'on sup-

pose m fixe, tend, pour n infini, vers la substitution limite $A - A_m$. Or, soit ε un nombre positif arbitrairement petit; en choisissant m suffisamment grand, on aura, d'après (30), pour tous les $n > m$, $M_{A_n - A_m} < \varepsilon$. Donc, d'après (29), on aura aussi

$$M_{A - A_m} \leqq \varepsilon,$$

et, par conséquent, pour $m \to \infty$,

$$M_{A - A_m} \to 0.$$

Énonçons notre résultat : *Pour que la suite des substitutions* (A_n) *converge uniformément, il faut et il suffit que, m et n tendant vers l'infini indépendamment l'un de l'autre, on ait*

$$M_{A_n - A_m} \to 0.$$

73. En particulier, pour les sommes partielles de la série (21), la condition énoncée est remplie. En effet, posons $S_n = E + A + \ldots + A^{n-1}$; de plus, supposons, ce qui est évidemment permis, $n > m$; on aura $S_n - S_m = A^m + A^{m+1} + \ldots A^{n-1}$ et

$$M_{S_n - S_m} \leqq M_{A^m} + \ldots + M_{A^{n-1}} \leqq (M_A)^m + \ldots + (M_A)^{n-1} = \frac{(M_A)^n - (M_A)^m}{1 - M_A};$$

et lorsque $M_A < 1$, cette quantité tend vers zéro. Donc S_n tend uniformément vers une substitution limite S.

Je dis que S est justement la réciproque de $E - A$. Cette assertion est comprise dans le théorème suivant, lequel, à son tour, découle immédiatement des inégalités

$$M_{BA - BA_n} = M_{B(A - A_n)} \leqq M_B M_{A - A_n}; \qquad M_{AB - A_n B} = M_{(A - A_n)B} \leqq M_{A - A_n} M_B:$$

Lorsque la suite (A_n) *tend uniformément vers* A^* *et que* B *désigne une substitution linéaire quelconque, les suites* (BA_n) *et* $(A_n B)$ *tendent uniformément vers* BA^* *et* $A^* B$.

Pour appliquer cette proposition à la série (21), posons $A_n = S_n$, $A^* = S$, $B = E - A$; comme on a

$$(E - A) S_n = S_n (E - A) = E - A^n \to E,$$

il résulte que

$$(E - A) S = S (E - A) = E,$$

c'est-à-dire

$$S = (E - A)^{-1}.$$

74. Énonçons encore dans cet ordre d'idées la proposition plus générale : *Lorsque* (A_n) *et* (B_n) *tendent uniformément vers* A *et* B, *la suite* $(A_n B_n)$ *tend uniformément vers* AB. En effet, on a toujours

$$M_{AB-A_nB_n} = M_{A(B-B_n)+(A-A_n)B_n} \leq M_A M_{B-B_n} + M_{A-A_n} M_{B_n},$$

et, par hypothèse,

$$M_{A-A_n} \to 0, \qquad M_{B-B_n} \to 0, \qquad M_{B_n} \to M_B.$$

On en conclut que

$$M_{AB-A_nB_n} \to 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il ne sera pas inutile de remarquer que la proposition analogue pour la convergence non uniforme est en défaut. Pour le voir, il suffit de considérer l'exemple suivant : $A_n : x'_1 = x_n$, $x'_i = 0$ pour $i > 1$; $B_n : x'_n = x_1$, $x'_i = 0$ pour $i \neq n$. Les suites (A_n) et (B_n) tendent vers des substitutions dont tous les coefficients s'annulent ; d'autre part, tous les produits $A_n B_n$ donnent la substitution $C : x'_1 = x_1$, $x'_i = 0$ pour $i > 1$; donc $A_n B_n = C \to C$, et C ne s'annule pas identiquement.

Pour compléter ces résultats, énonçons encore la proposition suivante que l'on démontre aisément : *Lorsque les suites* (A_n), (B_n) *tendent respectivement vers* A, B *et que l'une ou l'autre des deux suites converge uniformément, la suite* $(A_n B_n)$ *tend vers* AB [1].

75. Mais il y a encore un autre cas très important où l'on peut affirmer que $A_n B_n \to AB$. Le type le plus simple de suites (A_n) qui tendent vers A est fourni par les réduites de A ; celles-ci s'obtiennent en annulant dans le tableau (a_{ik}) tous les éléments dont l'un au moins des indices surpasse n. En général, les réduites ne tendent pas uniformément vers A ; ce fait se présente seulement lorsque A est complètement continue. Mais, d'autre part, la convergence des réduites vers A possède une propriété spécifique

---

[1] Cette proposition comprend, en corollaire, la suivante : *Lorsque* (A_n) *tend vers* A, *et que* B *désigne une substitution linéaire quelconque, les suites* $(A_n B)$, (BA_n) *tendent respectivement vers* AB *et* BA.

essentielle. En effet, la formule (3) nous apprend que si l'on applique successivement les réduites à un élément (x_k), les éléments qui résultent tendent fortement vers (x'_k). Intercalons donc entre convergence et convergence uniforme la convergence *forte*. Soit (A_n) une suite de substitutions tendant vers A, et convenons de dire que la suite (A_n) tend *fortement* vers A si, pour chaque élément (x_k), les éléments $A_n(x_k)$ tendent fortement vers $A(x_k)$.

Je dis que *si les suites* (A_n) *et* (B_n) *tendent fortement vers* A *et* B, *la suite* $(A_n B_n)$ *tend aussi fortement vers* AB.

En fait, les quantités M_{A_n}, M_{B_n} restant bornées, $M_{A_n B_n}$ le reste aussi. Tout revient donc à démontrer que les éléments qu'on obtient en appliquant successivement les substitutions $AB - A_n B_n$ à un élément (x_k), tendent fortement vers (o). Écrivons $AB - A_n B_n = (A - A_n)B + A_n(B - B_n)$ et considérons ces deux termes séparément. Quant à $(A - A_n)B$, la substitution B transforme (x_k) dans un élément (y_k), et $(A - A_n)(y_k)$ tend, d'après l'hypothèse faite, fortement vers (o). Quant à $A_n(B - B_n)$, posons

$$(B - B_n)(x_k) = (y_k^{(n)}), \qquad A_n(y_k^{(n)}) = (z_k^{(n)});$$

$(y_k^{(n)})$ tend, d'après l'hypothèse faite, fortement vers (o), et comme $\Sigma|z_k^{(n)}|^2 \leqq M_{A_n}^2 \Sigma|y_k^{(n)}|^2$, $(z_k^{(n)})$ tend aussi fortement vers (o). Donc le théorème est démontré.

En particulier, soit A_n la $n^{\text{ième}}$ *réduite* de A et soient A_n^k, A^k les $k^{\text{ièmes}}$ puissances des substitutions A_n et A; d'après le théorème que nous venons de démontrer, *la suite* (A_n^k) *tend fortement vers* A^k.

76. Posons maintenant la question suivante : Étant donnée une suite (A_n) qui tend *uniformément* vers A, on suppose que chacune des substitutions A_n admette une réciproque A_n. Peut-on en conclure l'existence de la réciproque A^{-1}; et s'il en est ainsi, est-ce que A^{-1} est la limite des A_n^{-1}? Cette question a des relations intimes, entre autres, avec le principe des réduites, comme nous le verrons tout à l'heure.

Supposons d'abord que les quantités $M_{A_n}^{-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ restent bornées dans leur ensemble. Dans ce cas, la suite (A_n^{-1}) converge uniformément et fournit la réciproque de A. En effet,

on a $A_n^{-1} - A_m^{-1} = A_n^{-1}(A_m - A_n)A_m^{-1}$, et, par conséquent,

$$M_{A_n^{-1} - A_m^{-1}} \leq M_{A_n^{-1}} M_{A_m^{-1}} M_{A_n - A_m}.$$

Or, dans l'hypothèse faite, le second membre de cette inégalité tend vers zéro avec $M_{A_n - A_m}$. Donc il en est de même quant au premier membre; par conséquent, la suite (A_n^{-1}) tend uniformément vers une substitution limite, que nous désignerons par $A^\star$. De plus, comme les suites (A_n), (A_n^{-1}) tendent uniformément vers A et $A^\star$, les suites $(A_n A_n^{-1})$, $(A_n^{-1} A_n)$ tendront uniformément vers $AA^\star$ et $A^\star A$. Mais $A_n A_n^{-1} = A_n^{-1} A_n = E$; par conséquent, $AA^\star = A^\star A = E$, c'est-à-dire que $A^\star$ est la réciproque de A.

Inversement, supposons que A admette une réciproque A^{-1}. Quant à la suite (A_n), nous supposons seulement qu'elle tend uniformément vers A. Mais nous ne supposons plus l'existence des réciproques A_n^{-1}; nous l'établirons. D'une façon précise, nous allons démontrer que A_n^{-1} existe pour n suffisamment grand, savoir lorsque

$$M_{A - A_n} < \frac{1}{M_{A^{-1}}}.$$

En effet, dans ce cas, on a

$$M_{E - A^{-1}A_n} = M_{A^{-1}(A - A_n)} \leq M_{A^{-1}} M_{A - A_n} < 1;$$

il s'ensuit que la substitution $A^{-1}A_n = E - (E - A^{-1}A_n)$ admet une réciproque. En désignant cette réciproque par B, on a $BA^{-1}A_n = E$, $A^{-1}A_n B = E$. La seconde équation doit encore être transformée; en multipliant les deux membres à gauche par A et à droite par A^{-1}, on obtient $A_n BA^{-1} = E$. Donc BA^{-1} fournit la réciproque de A_n. De plus, d'après le n° 64, on a

$$M_{A_n^{-1}} = M_{BA^{-1}} \leq M_B M_{A^{-1}} = M_{[E - (E - A^{-1}A_n)]^{-1}} M_{A^{-1}} \leq \frac{M_{A^{-1}}}{1 - M_{A^{-1}} M_{A - A_n}};$$

et, lorsque n croît indéfiniment, ce dernier membre tend vers $M_{A^{-1}}$. Donc, à partir de n suffisamment grand, les réciproques A_n^{-1} existent et les quantités $M_{A_n^{-1}}$ restent bornées dans leur ensemble. Par suite, en appliquant le théorème établi précédemment, on voit que la suite (A_n^{-1}) converge uniformément vers A^{-1}.

En résumé, *étant donnée une suite* (A_n) *qui tend uniformément vers* A, *la réciproque* A^{-1} *ne peut exister que si, à partir*

d'un certain rang n, les réciproques A_n^{-1} *existent et les quantités* $M_{A_n^{-1}}$ *restent bornées dans leur ensemble; inversement, lorsque cette condition est remplie, la suite* (A_n^{-1}) *converge uniformément et fournit la réciproque* A^{-1}.

Signalons encore le fait le plus essentiel dans notre raisonnement; nous nous en servirons plus loin. C'est le suivant : *Lorsque* A^{-1} *existe et que* M_B *est suffisamment petite* (savoir $M_B < \frac{1}{M_{A^{-1}}}$), *la réciproque* $(A+B)^{-1}$ *existe pareillement.* Ce fait constitue en quelque sorte une généralisation du théorème du n° 64.

77. Les résultats que nous venons d'établir permettent, entre autres, de légitimer le principe des réduites dans un cas important. Nous avons déjà dit que, en général, la suite des réduites A_n de A ne tend pas uniformément vers A; mais on démontre aisément que, pour A complètement continue, la convergence est uniforme [1]. Donc, pour A complètement continue, la suite $(E - A_n)$ tend aussi uniformément vers $E - A$. On en conclut que, dans l'hypothèse faite, $(E - A)^{-1}$ ne peut exister sans que, à partir d'un certain rang n, les $(E - A_n)^{-1}$ existent aussi, et que les $(E - A_n)^{-1}$ tendent uniformément vers $(E - A)^{-1}$. Donc, *pour* A *complètement continue et si, de plus,* $(E - A)^{-1}$ *existe, le calcul de cette réciproque peut être fondé sur le principe des réduites.*

ÉTUDE DE LA RÉCIPROQUE $(E - \lambda A)^{-1}$ EN FONCTION DE λ.

78. Désignons par λ un paramètre complexe et étudions la substitution $E - \lambda A$ au point de vue de l'inversion. L'avantage de

(1) La réciproque est aussi vraie : *Lorsque* $M_{A-A_n} \to 0$, A *est complètement continue.* Ce fait est contenu dans la proposition plus générale : *La limite d'une suite dont les éléments sont des substitutions complètement continues et qui converge uniformément est aussi complètement continue.*

Cette proposition embrasse aussi le cas où l'on fait l'hypothèse $M_{R_n} \to 0$ (*cf.* n° 67). En fait, les substitutions $A_n - P_n + Q_n$ sont toujours complètement continues, et $M_{R_n} \to 0$ exprime que ces substitutions tendent uniformément vers A. Donc, A est complètement continue. Par suite, eu égard encore au résultat établi au n° 67, $M_{R_n} \to 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour que B soit complètement continue.

cette étude consiste, entre autres, dans la façon compréhensive dont elle montrera, sur le même objet, les deux cas principaux. En effet, il existe en général deux catégories de valeurs λ : pour les unes, la substitution $E - \lambda A$ admettra une réciproque; pour les autres, elle n'en admettra pas. Celles de la première catégorie seront appelées les valeurs *ordinaires*, celles de la seconde les valeurs *singulières*. Ces dénominations, empruntées à la Théorie des fonctions, seront justifiées par les relations que l'étude de $(E - \lambda A)^{-1}$ aura avec cette théorie. Rappelons aussi que, à l'occasion de l'étude des substitutions complètement continues, nous avons déjà touché pour un instant le problème dont il s'agit, et que nous y avons observé quelques faits concernant la nature analytique de $(E - \lambda A)^{-1}$.

Certains des raisonnements qui suivent s'appliquent aussi à l'étude de la réciproque de $E - \sum_{k=1}^{n} \lambda^k A_k$, ou encore à celle de quelques autres substitutions, dépendant de λ suivant des lois moins simples. Nous nous bornerons à l'étude de $E - \lambda A$.

79. Soit donc A une substitution linéaire, d'ailleurs quelconque, et considérons la substitution $(E - \lambda A)^{-1}$ pour les valeurs λ où elle existe, c'est-à-dire pour les valeurs ordinaires. Dans certains calculs, il sera plus commode d'étudier la substitution A_λ, liée à $(E - \lambda A)^{-1}$ par l'équation

$$(E - \lambda A)^{-1} = E + \lambda A_\lambda. \tag{31}$$

Cette équation détermine A_λ univoquement pour toute valeur ordinaire, sauf pour $\lambda = 0$; posons par définition $A_0 = A$, ce qui revient, comme nous verrons, à définir A_0 par continuité.

L'équation (31) équivaut à la suivante

$$E - \lambda A = (E + \lambda A_\lambda)^{-1}. \tag{32}$$

Soient λ et μ deux valeurs ordinaires du paramètre. De (32) on tire

$$(\mu - \lambda) E = \mu (E + \lambda A_\lambda)^{-1} - \lambda (E + \mu A_\mu)^{-1};$$

en multipliant chaque membre à gauche par $E + \lambda A_\lambda$, à droite

par $E + \mu A_\mu$, l'équation devient

$$(\mu - \lambda)(E + \lambda A_\lambda)(E + \mu A_\mu) = \mu(E + \mu A_\mu) - \lambda(E + \lambda A_\lambda),$$

ou alors

$$\lambda\mu[A_\lambda - A_\mu + (\mu - \lambda)A_\lambda A_\mu] = 0.$$

Supposons $\lambda\mu \neq 0$. Dans cette hypothèse, notre équation donne

$$A_\lambda - A_\mu + (\mu - \lambda)A_\lambda A_\mu = 0. \tag{33}$$

En permutant λ et μ, on obtient

$$A_\lambda - A_\mu + (\mu - \lambda)A_\mu A_\lambda = 0. \tag{34}$$

Sur ces deux équations on voit, en particulier, que la multiplication de A_λ et de A_μ est *commutative*.

Supposons, en second lieu, $\lambda\mu = 0$; soit par exemple $\mu = 0$. Les formules (33) et (34) subsistent, car

$$A - A_\lambda + \lambda A A_\lambda = A - A_\lambda + \lambda A_\lambda A = 0.$$

En fait, en écrivant (32) d'une façon plus détaillée, on a

$$(E - \lambda A)(E + \lambda A_\lambda) = (E + \lambda A_\lambda)(E - \lambda A) = E, \tag{35}$$

et alors

$$-\lambda(A - A_\lambda + \lambda A A_\lambda) = -\lambda(A - A_\lambda + \lambda A_\lambda A) = 0;$$

de plus, en supposant $\lambda \neq 0$, la division par $-\lambda$ est permise. Le cas $\mu = \lambda = 0$ est évident.

En résumé, *les équations* (33) *et* (34) *sont vraies en tout cas.*

80. Voici une conséquence immédiate de ces équations. Soit donnée une suite de valeurs ordinaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, tendant vers une valeur limite λ^*. Supposons, de plus, que les quantités $M_{A_{\lambda_1}}$, $M_{A_{\lambda_2}}$, ... restent toutes inférieures à un nombre M. Je dis que λ^* est aussi une valeur ordinaire. En effet, il suffit de considérer l'une quelconque des deux équations pour en conclure l'inégalité

$$M_{A_{\lambda_n} - A_{\lambda_m}} \leqq |\lambda_n - \lambda_m| M^2.$$

Par conséquent, quand m et n croissent indéfiniment,

$$M_{A_{\lambda_n} - A_{\lambda_m}} \to 0;$$

donc, la suite (A_{λ_n}) tend uniformément vers une substitution A^*. La suite $(E + \lambda_n A_{\lambda_n})$ tend uniformément vers $E + \lambda^* A^*$. Enfin, les suites $[(E - \lambda_n A)(E + \lambda_n A_{\lambda_n})]$ et $[(E + \lambda_n A_{\lambda_n})(E - \lambda_n A)]$ tendent respectivement vers $(E - \lambda^* A)(E + \lambda^* A^*)$ et $(E + \lambda^* A^*)$ $(E - \lambda^* A)$. Mais les termes de ces deux suites sont tous égaux à E; donc il en sera de même quant aux deux substitutions limites. C'est-à-dire que $E + \lambda^* A^*$ n'est autre que la réciproque de $E - \lambda^* A$.

Énonçons notre résultat : *La valeur limite λ^* est une valeur ordinaire, et*

$$M_{A_{\lambda^*} - A_{\lambda_n}} \to 0.$$

On peut compléter ce résultat en démontrant le fait suivant : *Sur tout l'ensemble des valeurs ordinaires,* M_{A_λ} *est fonction continue de* λ. Ce fait repose sur l'inégalité

$$|M_{A_\lambda} - M_{A_\mu}| \leq |\lambda - \mu| M_{A_\lambda} M_{A_\mu}$$

qui, à son tour, suit immédiatement de (33) et des inégalités $|M_A - M_B| \leq M_{A-B}$; $M_{AB} \leq M_A M_B$. On en déduit, sous l'hypothèse $M_{A_\lambda} \neq 0$, $M_{A_\mu} \neq 0$,

$$\left|\frac{1}{M_{A_\lambda}} - \frac{1}{M_{A_\mu}}\right| \leq |\lambda - \mu|;$$

donc, sous cette hypothèse, $\frac{1}{M_{A_\lambda}}$ et alors M_{A_λ} sont des fonctions continues en λ. Mais notre hypothèse équivaut à ce que les substitutions A_λ, A_μ ne s'annulent pas identiquement. Or, d'après la relation $A = A_\lambda + \lambda A A_\lambda$, A_λ ne peut s'annuler identiquement que si $A = 0$. Par conséquent, M_{A_λ} est fonction continue de λ.

81. Nous venons d'étudier la manière dont se comporte M_{A_λ} sur l'ensemble des valeurs ordinaires du paramètre. Cherchons maintenant à préciser le caractère de cet ensemble lui-même. C'est un ensemble ouvert, c'est-à-dire : lorsque une valeur λ lui appartient, toutes les valeurs comprises dans un certain voisinage de λ lui appartiennent aussi. En effet, lorsque μ est une valeur ordinaire, toutes les valeurs λ telles que

$$|\lambda - \mu| < \frac{1}{M_{A_\mu}}$$

le sont aussi. Pour le voir, écrivons

$$\begin{aligned} E - \lambda A &= E - \mu A - (\lambda - \mu)A \\ &= E - \mu A - (\lambda - \mu)(E - \mu A)(E + \mu A_\mu)A \\ &= E - \mu A - (\lambda - \mu)(E - \mu A)A_\mu \\ &= (E - \mu A)[E - (\lambda - \mu)A_\mu]. \end{aligned}$$

Or, quant à ce dernier produit, son premier facteur a une réciproque, nous l'avons supposé, et le second facteur aussi, puisque, d'après l'hypothèse faite, $M_{(\lambda-\mu)A_\mu} = |\lambda - \mu| M_{A_\mu} < 1$. Donc, $E - \lambda A$ admet aussi une réciproque, qui sera fournie par le produit de celles de $E - (\lambda - \mu)A_\mu$ et de $E - \mu A$. La seconde de ces deux substitutions a pour réciproque $E + \mu A_\mu$; la réciproque de la première est fournie (nº 73) par la série uniformément convergente

$$E + (\lambda - \mu)A_\mu + (\lambda - \mu)^2 A_\mu^2 + \ldots;$$

et alors, en multipliant, il vient

$$(E - \lambda A)^{-1} = E + \mu A_\mu + \mu(\lambda - \mu)A_\mu^2 + \mu(\lambda - \mu)^2 A_\mu^3 + \ldots.$$

Par suite, A_λ admet le développement uniformément convergent

$$A_\lambda = A_\mu + (\lambda - \mu)A_\mu^2 + (\lambda - \mu)^2 A_\mu^3 + \ldots.$$

Observons que l'on aurait aussi pu rattacher ce fait à l'autre que pour $\lambda \to \mu$ le rapport $\dfrac{A_\lambda^k - A_\mu^k}{\lambda - \mu}$ tend uniformément vers $k A_\mu^{k+1}$, c'est-à-dire que A_μ, considéré comme fonction de μ, admet les dérivées successives A_μ^2, $2A_\mu^3$, ..., $k!\,A_\mu^{k+1}$, ...

Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent être résumés succinctement en disant que, pour les valeurs ordinaires de λ, la substitution A_λ et aussi les autres substitutions y liées, qui entraient dans le calcul, *montrent les caractères d'une fonction holomorphe en* λ.

82. On peut aller plus loin en appliquant à l'étude de A_λ les différentes méthodes de la Théorie des fonctions; en particulier, on pourra y appliquer le *calcul des résidus*. Je me borne à indiquer sommairement quelques résultats que l'on obtiendra dans cette direction.

Soit D un domaine bordé par un nombre fini de courbes fermées que l'on pourra supposer analytiques. En se rappelant la définition des suites convergentes de substitutions, le lecteur pourra définir sans ambiguïté l'intégrale (le long de ces lignes et par rapport à λ) d'une substitution qui dépend de λ. En particulier, pour les substitutions que nous envisageons, si la frontière de D se compose de valeurs ordinaires de λ, les intégrales dont il s'agit existent et, de plus, on y peut appliquer tout l'appareil classique de Cauchy. Supposons cette condition remplie et supposons, de plus, que le point $\lambda = 0$ soit extérieur au domaine. Nous définirons les substitutions $A^{(k)}$ par l'intégrale $\frac{-1}{2i\pi}\int A^{-k} A_\lambda d\lambda$, prise le long de tout le contour; k y désigne un nombre entier quelconque, positif, négatif ou zéro. En appliquant le calcul des résidus, on déduit aisément des formules (33) et (34) les relations $AA^{(k)} = A^{(k)}A = A^{(k+1)}$ et $A^{(k)}A^{(l)} = A^{(k+l)}$.

Ces deux relations contiennent en germe une foule de faits remarquables. Envisageons les deux substitutions $A^{(1)}$ et $A - A^{(1)}$. Nos relations donnent, pour $k = l = 1$,

$$(A - A^{(1)})A^{(1)} = A^{(1)}(A - A^{(1)}) = 0;$$

donc, les deux produits des substitutions $A^{(1)}$, $A - A^{(1)}$ s'annulent, ce qu'on exprime aussi en disant que ces deux substitutions sont *orthogonales* l'une à l'autre. D'une façon plus générale, k désignant un entier quelconque et l désignant un entier positif, les substitutions $A^{(k)}$ et $A^l - A^{(l)}$ sont orthogonales l'une à l'autre.

En multipliant par $A^{(0)}$ respectivement à gauche et à droite les relations $\lambda A_\lambda - \lambda A - \lambda^2 AA_\lambda = 0$, $\lambda A_\lambda - \lambda A - \lambda^2 A_\lambda A = 0$ (n° 79) et en ajoutant E aux deux membres, en remarquant de plus que

$$A^{(1)} = A^{(0)}A = AA^{(0)} = A^{(0)}A^{(0)}A = A^{(0)}AA^{(0)},$$

on obtient

$$(E - \lambda A^{(1)})(E + \lambda A^{(0)}A_\lambda) = (E + \lambda A_\lambda A^{(0)})(E - \lambda A^{(1)}) = E;$$

donc, toute valeur de λ ordinaire par rapport à A l'est aussi par rapport à $A^{(1)}$, et $A - \lambda A^{(1)}$ admet la réciproque

$$E + \lambda A^{(0)}A_\lambda = E + \lambda A_\lambda A^{(0)}.$$

Un calcul analogue montre que λ est aussi valeur ordinaire pour

$A - A^{(0)}$ et que $E + \lambda A - \lambda A^{(0)}$ admet la réciproque

$$E + \lambda A_\lambda - \lambda A^{(0)} A_\lambda = E + \lambda A_\lambda - \lambda A_\lambda A^{(0)}.$$

En posant encore, pour simplifier l'écriture, $A^{(0)} = B$, $A - A^{(0)} = C$ et en introduisant les notations B_λ et C_λ analogues à A_λ, on a

$$B = A^{(0)} A = A A^{(0)}, \qquad C = (E - A^{(0)}) A = A (E - A^{(0)}),$$
$$B_\lambda = A^{(0)} A_\lambda = A_\lambda A^{(0)}, \qquad C_\lambda = (E - A^{(0)}) A_\lambda = A_\lambda (E - A^{(0)}).$$

Nous avons déjà vu que $BC = CB = 0$; des expressions données on déduira de même

$$BC_\lambda = C_\lambda B = B_\lambda C = CB_\lambda = B_\lambda C_\lambda = C_\lambda B_\lambda = 0.$$

Nous venons de voir, entre autres, que *quand* A_λ *existe*, B_λ *et* C_λ *existent toujours aussi.* Mais il y a plus. Je dis que B_λ *existe*, *sans exception*, *pour toute valeur* λ *extérieure au domaine* D *et que* C_λ *existe pour toute valeur intérieure*, *même quand* λ *est singulière par rapport à* A. En effet, en appliquant de nouveau le calcul des résidus, on démontre aisément que, pour λ extérieure, la substitution $\frac{1}{2i\pi}\int \frac{A_\mu \, d\mu}{\lambda - \mu}$ et, pour λ intérieure, la substitution $\frac{1}{2i\pi}\int \frac{A_\mu \, d\mu}{\mu - \lambda}$ satisfont respectivement aux équations qui définissent B_λ et C_λ. Il est aussi facile de voir que B_λ et C_λ ainsi prolongées restent orthogonales respectivement à C et à B.

Les faits suivants montreront l'importance de la décomposition de A en B et C. Soit λ une valeur intérieure au domaine D, d'ailleurs quelconque. Envisageons les deux systèmes d'équations à une infinité d'inconnues qui correspondent aux substitutions $E - \lambda A$ et $E - \lambda B$, les données (x'_k) étant les mêmes pour les deux systèmes. Alors les égalités $E - \lambda A = (E - \lambda B)(E - \lambda C)$ et $E - \lambda B = (E - \lambda A)(E + \lambda C_\lambda)$ indiquent que, à chaque solution du premier système, il correspond une solution du second, qu'on obtient en y appliquant la substitution $E - \lambda C$, et que, inversement, en appliquant à une solution du second système la substitution $E + \lambda C_\lambda$, on obtient une solution du premier système. En particulier, quant aux deux systèmes *homogènes* qui correspondent à $E - \lambda A$ et à $E - \lambda B$, les relations $E - \lambda B = (E + \lambda C_\lambda)(E - \lambda A)$ et $E - \lambda A = (E - \lambda C)(E - \lambda B)$

mettent en évidence que *ces deux systèmes admettent précisément les mêmes solutions*. Ces solutions satisfont aussi au système homogène qui correspond à $E - A^{(0)}$; ce fait résulte immédiatement de la relation $(E - A^{(0)})(E - \lambda B) = E - A^{(0)}$, c'est-à-dire de $B = A^{(0)}B$. Mais les solutions de ce dernier système sont précisément les éléments qu'on obtient lorsqu'on applique la substitution $A^{(0)}$ à tout l'espace hilbertien : pour le voir, il suffit de rappeler la relation $A^{(0)} = A^{(0)}A^{(0)}$. Appelons ces éléments les *éléments principaux* correspondant au domaine D; alors nous pourrons dire que, pour λ intérieure, *les solutions du système homogène qui correspond à* $E - \lambda A$, *se trouvent parmi les éléments principaux*. Mais les éléments principaux jouissent encore d'une autre propriété remarquable. *La substitution* A, *appliquée seulement à l'ensemble des éléments principaux, y définit une correspondance biunivoque*. En fait, ces éléments sont du type $A^{(0)}(x_k)$, et comme $AA^{(0)} = A^{(0)}A$, les éléments $AA^{(0)}(x_k)$ sont du même type. De plus, comme on a $AA^{(-1)}A^{(0)} = A^{(-1)}$, $AA^{(0)} = A^{(0)}$, la substitution $A^{(-1)}$ est, mais seulement pour l'ensemble considéré, une sorte de réciproque de A.

Je quitte maintenant cet ordre d'idées un peu trop général, mais tout en observant que je suis loin d'avoir énuméré complètement les questions intéressantes qui se posent. Je dirai seulement encore quelques mots sur le cas où A est *complètement continue*. Tout d'abord, en rappelant que la somme de deux substitutions complètement continues ainsi que le produit de deux substitutions dont l'une au moins est complètement continue, donnent des substitutions complètement continues, on reconnaît successivement sur l'une ou l'autre des relations que nous venons d'indiquer que A_λ, $A^{(k)}$, B_λ, C_λ sont complètement continues. D'autre part, dans ce cas particulier, les valeurs singulières sont isolées; nous empruntons ce fait au n° 70, mais on pourrait aussi le démontrer plus directement. Par suite, si λ_0 est une valeur singulière, on peut choisir pour domaine D un petit cercle entourant λ_0. Cela étant, B_λ existera pour toute valeur de λ, sauf pour $\lambda = \lambda_0$. La substitution $A^{(0)}$, appliquée à tout l'espace hilbertien, fournira les éléments principaux qui correspondent à λ_0. Mais $A^{(0)}$ est complètement continue et l'on reconnaît aisément que, *si l'on applique à l'espace hilbertien une substitution complètement*

continue, les éléments qui en résultent s'expriment linéairement par un nombre fini d'entre eux. Donc, l'étude de la correspondance biunivoque définie par A pour l'ensemble des éléments principaux — et alors l'étude de A_λ au voisinage de λ_0 — se réduisent à celle d'une substitution linéaire à un nombre fini de variables et s'achèvent par les méthodes classiques de la théorie des substitutions linéaires.

Les mêmes raisonnements portent aussi sur la transposée $\mathfrak{A}$ de A, et les substitutions $\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{A}^{(k)}$, $\mathfrak{B}_\lambda$, $\mathfrak{C}_\lambda$ qui s'en déduisent sont les transposées des substitutions A_λ, $A^{(k)}$, B_λ, C_λ que nous venons de considérer.

La méthode que je viens d'esquisser ne se limite pas à la théorie dont il s'agit présentement. Le lecteur versé dans la théorie des équations intégrales aura reconnu tout au commencement le parallélisme qui existe entre nos raisonnements et certaines recherches plus ou moins nouvelles qui appartiennent à cette théorie (¹). Ce parallélisme s'expliquera de suite en remarquant que les deux théories, celle des équations intégrales et celle des substitutions linéaires à une infinité de variables, entrent comme cas particuliers dans une théorie beaucoup plus générale, savoir, dans la théorie des opérations distributives (²).

(¹) *Cf.* par exemple le Mémoire de M. Goursat : *Recherches sur les équations intégrales linéaires* (*Annales Fac. Toulouse*, t. X, 1908, p. 5-98).

(²) *Cf.* sur ce sujet l'article de M. Pincherle dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, vol. 5, fascicule 1.

CHAPITRE V.

LA THÉORIE DES FORMES QUADRATIQUES A UNE INFINITÉ DE VARIABLES.

GÉNÉRALITÉS. LES FORMES QUADRATIQUES A UN NOMBRE FINI DE VARIABLES.

83. Dans le Chapitre précédent, nous avons considéré entre autres des tableaux (a_{ik}) tels que $a_{ik} = \overline{a}_{ki}$. Les substitutions correspondantes montraient certaines qualités particulières que l'on aperçut en étudiant l'hermitien

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} x_i \overline{x_k}.$$

Mais c'était toujours la théorie générale des substitutions linéaires que nous avions en vue, et nos tableaux spéciaux n'y jouaient qu'un rôle auxiliaire. Dans ce qui suit, nous nous bornerons à considérer de tels tableaux. Pour simplifier les énoncés, nous supposerons en outre les a_{ik} réels [1], et par conséquent $a_{ik} = a_{ki}$; ce qui nous conduira à envisager *les formes quadratiques réelles à une infinité de variables*

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} x_i x_k.$$

Les résultats que nous allons obtenir s'étendent presque immédiatement aux *hermitiens* et aux tableaux et substitutions qui y correspondent.

---

(1) Dans tout ce Chapitre, il s'agira, en général, des quantités réelles. L'hypothèse contraire sera faite toujours expressément.

84. Notre point de départ sera fourni par des faits bien connus concernant les formes quadratiques à un nombre fini de variables. Tous ces faits sont compris, en germe, dans le théorème fondamental (1) :

Toute forme quadratique à n variables

$$(1)\qquad A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

peut être décomposée en n carrés de formes linéaires

$$(2)\qquad A(x, x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left(\sum_{k=1}^{n} l_{jk} x_k \right)^2,$$

et cela de sorte que

$$(3)\qquad \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} l_{jk} x_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Voici la conséquence la plus importante de ce théorème. Désignons par A la substitution à n variables qui correspond au tableau (a_{ik}), et désignons par E la substitution identique à n variables. Cela posé, envisageons la forme quadratique

$$(4)\qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} l_{jk} x_k \right)^2}{\lambda - \mu_j};$$

elle est bien définie pour toute valeur de λ, sauf pour les valeurs $\lambda = \mu_j$. La substitution linéaire qui y correspond est précisément la réciproque de $\lambda E - A$ (2).

En effet, on peut interpréter les formules (2) et (3) de la façon suivante : Soit E_j la substitution qui correspond à la forme quadratique $\left(\sum_{k=1}^{n} l_{jk} x_k \right)^2$. Comme, en vertu de (3), le tableau des l_{jk}

(1) CAUCHY, *Exercices de Mathématiques*, 4e année; Paris, 1829, p. 159.

(2) La considération de $\lambda E - A$, au lieu de $E - \lambda A$, revient à changer λ en $\frac{1}{\lambda}$; d'ailleurs, cette modification n'est pas essentielle, elle est seulement plus conforme à l'ordre d'idées que nous suivrons. Entre autres, elle a l'avantage que $\lambda = \infty$ devient valeur ordinaire.

est orthogonal et normé, on a évidemment $E_j^2 = E_j$ et $E_i E_j = 0$ pour $i \neq j$; enfin on a $E_1 + E_2 + \ldots + E_n = E$. D'après (2) on a

$$A = \mu_1 E_1 + \ldots + \mu_n E_n;$$

donc

$$\lambda E - A = (\lambda - \mu_1) E_1 + \ldots + (\lambda - \mu_n) E_n.$$

D'autre part, à la forme quadratique (4) correspond la substitution $\frac{E_1}{\lambda - \mu_1} + \ldots + \frac{E_n}{\lambda - \mu_n}$. Le produit de ces deux substitutions, qui est évidemment commutatif, donne $E_1 + \ldots + E_n = E$. Par conséquent, elles sont les réciproques l'une de l'autre.

Ce raisonnement ne suppose pas λ réel. Donc (4) donne l'expression de $(\lambda E - A)^{-1}$, ou plus précisément de la forme quadratique correspondante, pour toute valeur ordinaire du paramètre complexe λ. Mais elle met aussi en évidence les valeurs singulières $\lambda = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ et, en même temps, elle montre comment se comporte la substitution $(\lambda E - A)^{-1}$ au voisinage de ces valeurs singulières.

Brièvement, dans le cas d'un nombre fini de variables, la décomposition (2) de la forme (1) fournit sur-le-champ la solution de tous les problèmes qui concernent la réciproque de $\lambda E - A$. En sera-t-il de même pour une infinité de variables? Oui. M. Hilbert a démontré, dans son Mémoire déjà bien des fois mentionné, que toute forme quadratique réelle et bornée à une infinité de variables peut être décomposée d'une façon analogue à (2) et (3); seulement, en général, au lieu des sommes finies, il faudra se servir de deux sortes d'algorithmes illimités. D'une part, on aura à sommer une infinité dénombrable de termes analogues à ceux de (2) et (3), et, d'autre part, il faudra intégrer par rapport à un paramètre continu. J'ai observé ailleurs que l'on peut réunir ces deux procédés en utilisant la notion d'intégrale de Stieltjes, et que cette façon d'énoncer le théorème de M. Hilbert présente, pour la démonstration, quelques avantages [1].

85. Avant de passer définitivement aux formes quadratiques à une infinité de variables, retournons encore une fois à la forme (1)

---

[1] *Voir* ma lettre adressée à M. Hilbert : *Ueber quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen* (*Nachrichten Ges. Wiss.*, Göttingen, 1910, p. 190-195).

et à la substitution A qui y correspond. Soient A^2, A^3, ... les puissances de cette substitution; d'après les formules $E_i E_j = \begin{matrix} E_i \\ 0 \end{matrix}$ pour $i \overline{\mp} j$, il y correspond évidemment les formes quadratiques

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j^2 \left(\sum_{k=1}^{n} l_{jk} x_k \right)^2, \qquad \sum_{j=1}^{n} \mu_j^3 \left(\sum_{k=1}^{n} l_{jk} x_k \right)^2, \qquad \dots$$

Soient, de plus, ν_0, ν_1, ..., ν_r des nombres réels, d'ailleurs quelconques; posons $\nu_0 + \nu_1 \mu + \ldots + \nu_r \mu^r = f(\mu)$. Cela posé, envisageons la substitution $\nu_0 E + \nu_1 A + \ldots + \nu_r A^r$; moyennant une écriture symbolique évidente, elle pourra être désignée par $f(A)$. Il y correspond la forme quadratique

$$(5) \qquad \sum_{j=1}^{n} f(\mu_j) \left(\sum_{k=1}^{n} l_{jk} x_k \right)^2.$$

La valeur de cette expression sera, d'après (3), une certaine moyenne des valeurs $f(\mu_1), \ldots, f(\mu_n)$, multipliée encore par $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$. Observons d'autre part que la plus petite et la plus grande des quantités μ_j sont égales respectivement au minimum m et au maximum M de la forme (1), variée sous la condition $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$; ce qui découle immédiatement de nos formules de décomposition. Par suite, *l'ensemble des valeurs de la forme* (5), *variée sous la même condition*, *est tout entier compris entre les deux valeurs extrémales de* $f(\mu)$ *dans l'intervalle* (m, M).

LES FORMES QUADRATIQUES A UNE INFINITÉ DE VARIABLES. SUITES ET PRODUITS SYMBOLIQUES.

86. Soit (a_{ik}) un tableau à double entrée, réel et symétrique en i et k. Envisageons la forme quadratique

$$(6) \qquad \mathrm{A}(x, x) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} x_i x_k$$

et ses *réduites*

$$[\mathrm{A}(x, x)]_n = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k.$$

Je fais l'hypothèse qu'il existe un nombre positif M de sorte que

$$|[A(x,x)]_n| \leq M \sum_{k=1}^{n} x_k^2,$$

quels que soient n et les x_k. Quand cette hypothèse est remplie, nous disons, avec M. Hilbert, que la forme (6) est *bornée* (¹).

De plus, associons à la forme quadratique (6) la forme *bilinéaire*

$$A(x,y) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} x_i y_k$$

et ses réduites

$$[A(x,y)]_n = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k.$$

On a évidemment

$$4|[A(x,y)]_n| = |[A(x+y,x+y)]_n - [A(x-y,x-y)]_n|$$

$$\leq M\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2 + \sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right]$$

$$= 2M \sum_{k=1}^{n}(x_k^2+y_k^2).$$

Par conséquent, lorsque $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq 1$, $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leq 1$, on a aussi

$$|[A(x,y)]_n| \leq M.$$

Donc, à cause de l'homogénéité, on aura, dans le cas général,

$$|[A(x,y)]_n| \leq M\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(¹) Il convient d'observer que, en exposant ses recherches, M. Hilbert se place d'abord dans l'ordre d'idées le plus général possible; sans faire aucune hypothèse sur l'ordre de grandeur des coefficients a_{ik}, il envisage la forme (6) comme un symbole pour l'ensemble des réduites. *Cf.* aussi la Note de M. Le Roux, *Sur les formes quadratiques définies à une infinité de variables* (*Comptes rendus*, 10 janvier 1910), dont l'ordre d'idées est moins général, mais plus accessible au calcul.

Posons en particulier

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k;$$

il vient

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k\right)^2 \leq M^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

C'est-à-dire que, dans l'hypothèse faite, il correspond au tableau (a_{ik}) une substitution linéaire A et l'on a $M_A \leq M$. On en conclut aussi, d'après le n° 58, que pour tout élément (x_k) de l'espace hilbertien, la série à double entrée (6) converge vers une limite déterminée, ne dépendant pas de la manière dont on passe à la limite. En particulier,

$$[A(x, x)]_n \to A(x, x).$$

Inversement, soit A une substitution linéaire à une infinité de variables, aux coefficients a_{ik} réels et symétriques en i et k. Soit M_A la borne de A. On a, par définition,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k\right)^2 \leq M_A^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2,$$

et l'inégalité de Cauchy-Lagrange donne

$$|[A(x, x)]_n| \leq \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq M_A \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Donc la forme (6) est bornée.

En résumé, étant donné le tableau réel et symétrique (a_{ik}), les deux hypothèses suivantes : 1° *il y correspond une forme quadratique bornée* $A(x, x)$; 2° *il y correspond une substitution linéaire* A, sont équivalentes l'une à l'autre, et la borne M_A de la substitution est en même temps la borne supérieure de $|A(x, x)|$, variée sous la condition $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = 1$.

87. Soit maintenant à considérer une suite $A_1, A_2, \ldots$ de formes quadratiques bornées; supposons que les substitutions qui y correspondent tendent vers une substitution A (n° 71). Dans ces conditions, on aura aussi, d'après le n° 40,

$$(7) \qquad A_n(x, y) \to A(x, y)$$

et en particulier

$$A_n(x, x) \to A(x, x).$$

Inversement, on peut supposer que cette dernière relation ait lieu pour tout élément (x_k). Donc, à plus forte raison, les réduites et alors, les coefficients des formes A_n convergeront aussi vers ceux de A. Par conséquent, en supposant encore que les quantités M_{A_1}, M_{A_2}, ... restent bornées dans leur ensemble, on pourra affirmer que *les substitutions* A_1, A_2, ... *convergent vers la substitution* A.

Soient de plus $A(x, x)$ et $B(x, x)$ deux formes quadratiques bornées, A et B les substitutions qui y correspondent. Leur produit AB ne donne pas nécessairement lieu à une forme quadratique, car le tableau des coefficients n'est pas nécessairement symétrique en i et k. Pour qu'il le soit, il faut et il suffit évidemment que AB = BA. Dans ce cas, nous appellerons la forme quadratique

$$AB(x, x) = BA(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} x_k \right)$$

le *produit* symbolique des formes A et B.

Nous aurons à nous servir du fait suivant : *Lorsque*

$$A_n(x, x) \to A(x, x)$$

et si, de plus, les quantités M_{A_1}, M_{A_2}, ... *restent bornées dans leur ensemble, on a aussi*

$$(8) \qquad A_n B(x, x) \to AB(x, x).$$

On pourrait rattacher ce fait aux raisonnements des nos 71 et suivants; mais il découle aussi de la formule (7), en y posant $(y_k) = B(x_k)$.

LES FONCTIONS SYMBOLIQUES D'UNE FORME QUADRATIQUE.
ÉTUDE DE LA CORRESPONDANCE
ENTRE LES FONCTIONS D'UNE VARIABLE ET LES FONCTIONS SYMBOLIQUES.

88. Soit A une substitution linéaire réelle et symétrique à la fois. Les puissances A^2, A^3, ... le seront également, et il en sera de même quant aux polynomes $f(A) = \nu_0 E + \nu_1 A + \ldots + \nu_r A^r$.

A chacune des substitutions E, A, A^2, ..., $f(A)$ correspond une forme quadratique bornée $E(x, x)$, $A(x, x)$, $A^2(x, x)$, ..., $f(A)(x, x)$. Nous parlerons, pour abréger, des formes quadratiques E, A, A^2, ..., $f(A)$.

Soit A_n la $n^{ième}$ réduite de la substitution A ; elle peut être envisagée soit comme substitution à une infinité de variables, soit comme substitution à n variables. Il y correspond une forme quadratique à n variables qui n'est autre que la $n^{ième}$ réduite de la forme $A(x, x)$. De même, les puissances A_n^2, A_n^3, ... et les polynomes $f(A_n)$ donnent lieu chacun à une forme quadratique à n variables : $A_n^2(x, x)$, ..., $f(A_n)(x, x)$.

D'après le n° 75 on a, pour tout élément (x_k),

$$f(A_n)(x, x) \to f(A)(x, x). \tag{9}$$

Cette relation nous permet d'étendre le théorème du n° 85 aux formes quadratiques à une infinité de variables. En fait, soient m_n et M_n le minimum et le maximum de la forme A_n, variée sous la condition $E_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$; ils sont évidemment compris entre la borne inférieure m et la borne supérieure M de la forme A, variée sous la condition $E = 1$. D'après le théorème à étendre, lorsque μ varie de m_n jusqu'à M_n, $f(A_n)(x, x)$ reste comprise entre les valeurs extrêmes de $f(\mu)\,E_n(x, x)$. En passant à la limite et eu égard à (9), on voit que :

L'ensemble des valeurs de la forme $f(A)$, *variée sous la condition* $E = 1$, *reste compris entre les deux valeurs extrêmes de* $f(\mu)$, μ *variant dans l'intervalle* (m, M).

En particulier, lorsque $f(\mu)$ reste > 0 dans tout l'intervalle (m, M), $f(A)$ sera une forme quadratique positive.

89. Nous venons de faire correspondre à chaque polynome $f(\mu)$ une forme quadratique bien déterminée $f(A)$. Cette correspondance jouit des caractères suivants :

I. Elle est *distributive*, c'est-à-dire que, pour $\varphi = c_1 f_1 + c_2 f_2$, on a $\varphi(A) = c_1 f_1(A) + c_2 f_2(A)$.

II. *L'ensemble des valeurs de* $f(A)$, *lorsque* $E = 1$, *reste compris entre les valeurs extrêmes de* $f(\mu)$.

III. Elle est *multiplicative* : au produit effectif des deux fonctions $f_1 . f_2$ correspond le produit symbolique des formes $f_1(X)$. $f_2(X)$.

Nous allons voir que l'on peut étendre la correspondance à un champ fonctionnel beaucoup plus vaste, et cela de sorte que les trois propriétés énoncées subsistent.

Le passage des polynomes aux fonctions continues est immédiat. D'après le théorème bien connu de Weierstrass, toute fonction continue dans l'intervalle (m, M) y peut être approchée uniformément par une suite de polynomes. Or, à toute telle suite correspond une certaine suite de formes quadratiques, et, d'après ce qui précède, cette suite converge aussi uniformément. Donc elle admet une forme limite, que l'on fera correspondre à la fonction continue donnée. On voit sur-le-champ que la forme limite ne dépend pas du choix particulier de la suite par laquelle on approche la fonction donnée.

On se rend aussi aisément compte de ce que, pour la correspondance ainsi établie, les propriétés énoncées subsistent.

Cependant, pour les raisonnements qui suivent, la considération des fonctions continues ne suffit pas. Nous allons étendre la correspondance à un champ fonctionnel contenant, outre les fonctions continues, certaines fonctions discontinues. Il est manifeste que, pour y arriver, il faudra renoncer à l'emploi exclusif des suites uniformément convergentes [1].

90. Envisageons une suite de polynomes $[f_n(\mu)]$; nous supposons que l'on ait $f_1(\mu) \leqq f_2(\mu) \leqq f_3(\mu) \ldots$, sur l'intervalle (m, M); ce que nous exprimerons en disant que la suite est *croissante*. De plus, nous la supposerons *bornée*. Cela étant, la suite tend,

---

[1] L'idée analogue d'envisager la correspondance entre les fonctions d'une ou de plusieurs variables et les fonctions symboliques de certaines opérations fonctionnelles fut appliquée récemment avec succès par M. Volterra à l'étude des équations intégrales et d'un type mixte d'équations fonctionnelles (équations intégro-différentielles), dans une suite de Notes imprimées dans les *Atti della R. Accademia dei Lincei*. Voir aussi les *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles* du même auteur qui viennent de paraître dans cette Collection. Il convient d'ailleurs d'observer que M. Volterra se limite aux fonctions analytiques; ici, au contraire, la considération des fonctions discontinues est essentielle.

sur l'intervalle (m, M), vers une fonction bornée $f(\mu)$. D'autre part, en vertu de I et II, les formes $f_n(A)$ constituent aussi une suite croissante et bornée; elle restent $\leqq E \times$ borne sup. de $f(\mu)$. Par conséquent, les $f_n(A)$ tendent vers une forme limite, laquelle reste aussi $\leqq E \times$ borne sup. de $f(\mu)$.

Convenons de désigner la forme limite par $f(A)$ et de l'attacher à la fonction $f(\mu)$. Pour légitimer cette convention, il faudra démontrer que la forme limite ne dépend que de la fonction limite. D'une façon plus détaillée, il faut démontrer que lorsque deux suites croissantes de polynomes $[f_n(\mu)]$, $[g_n(\mu)]$ tendent vers la même fonction limite, les formes $f_n(A)$, $g_n(A)$ tendent aussi, à leur tour, vers une même forme limite.

Le fait à démontrer est contenu dans le résultat un peu plus compréhensif que nous allons établir. Soient $[f_n(\mu)]$, $[g_n(\mu)]$ deux suites croissantes et soient $f(\mu)$ et $g(\mu)$ leurs fonctions limites. Supposons de plus que $f(\mu) \leqq g(\mu)$. Cela étant, je dis que $f(A) \leqq g(A)$. En effet, soit $f_m(\mu)$ un polynome quelconque tiré de la première suite et soit ε une quantité positive arbitrairement petite. Supposons m et ε fixes et parcourons la suite $[g_n(\mu)]$. Pour n suffisamment grand, on aura $g_n(\mu) > f_m(\mu) - \varepsilon$, puisque, dans le cas contraire, les valeurs μ telles que $f_m(\mu) - \varepsilon \geqq g_1(\mu)$, $f_m(\mu) - \varepsilon \geqq g_2(\mu)$, etc. constitueraient une suite d'ensembles fermés, dont chacun contiendrait les suivants, et il y aurait au moins un point μ^* contenu dans tous ces ensembles; donc on aurait $f(\mu^*) > f_m(\mu^*) - \varepsilon \geqq g(\mu^*)$, contrairement à l'hypothèse faite. Par conséquent, on a pour n suffisamment grand $f_m - \varepsilon < g_n$ et alors $f_m(A) - \varepsilon E < g_n(A)$. Cette inégalité entraîne $f_m(A) - \varepsilon E < g(A)$ et, comme m et ε sont arbitraires, il en résulte $f(A) \leqq g(A)$; ce qu'il fallait démontrer.

Le fait que la forme limite ne dépend que de la fonction limite correspond au cas où $f = g$; il se rattache au résultat que nous venons d'établir, en remplaçant l'égalité $f = g$ par les deux inégalités $f \leqq g$, $g \leqq f$.

Ainsi, la correspondance entre $f(\mu)$ et $f(A)$, établie d'abord pour les polynomes, s'étend, d'une façon bien déterminée, à toute fonction bornée qui est la limite d'une suite croissante de polynomes. Il est manifeste qu'on peut aussi l'étendre aux fonctions limites des suites décroissantes; pour cela, on n'aura

qu'à changer les signes. Mais il y a plus. Soient f et g deux fonctions du type que nous venons d'étudier; alors la fonction $h = f + g$ sera du même type et l'on aura aussi évidemment $h(A) = f(A) + g(A)$; au contraire, la fonction $\varphi = f - g$ ne sera, en général, ni du même type, ni du type opposé. Convenons de poser, par définition, $\varphi(A) = f(A) - g(A)$. Pour légitimer cette convention, il faut montrer que, lorsque $f - g = f^\star - g^\star$, on a aussi

$$f(A) - g(A) = f^\star(A) - g^\star(A).$$

Or, l'hypothèse faite s'écrit $f + g^\star = f^\star + g$; maintenant, les deux membres entrent dans le type que nous venons d'étudier. Donc, on aura

$$f(A) + g^\star(A) = f^\star(A) + g(A)$$

et, par conséquent,

$$f(A) - g(A) = f^\star(A) - g^\star(A).$$

La convention est légitime et notre correspondance se trouve prolongée aussi aux fonctions du type $f - g$.

La correspondance ainsi prolongée ne cesse pas de jouir des propriétés I, II, III. Tout d'abord, elle est évidemment *distributive;* de plus, elle a la propriété II : *l'ensemble des valeurs de la forme* $\varphi(A) = f(A) - g(A)$ *reste compris, pour* $E(x, x) = 1$, *entre les bornes inférieure et supérieure de* $\varphi(\mu)$. En fait, soit, par exemple, c la borne inférieure; on a $f(\mu) \geqq g(\mu) + c$ et, par conséquent, $f(A) \geqq g(A) + cE$, c'est-à-dire $\varphi(A) \geqq cE$. Même raisonnement pour la borne supérieure.

Enfin, la correspondance prolongée jouit aussi de la propriété III : elle est *multiplicative*. Évidemment, sans restreindre la généralité, il suffira de démontrer cette proposition pour deux fonctions $f(\mu)$ et $g(\mu)$ qui sont les limites de deux suites croissantes de polynomes $[f_n(\mu)]$, $[g_n(\mu)]$; de plus, on pourra supposer les fonctions f, g, f_n, g_n d'être positives, ce qui revient à y ajouter des constantes convenables.

91. Cela étant, envisageons la suite des fonctions $[f(\mu) g_n(\mu)]$; elle tend, en croissant, vers la fonction $f(\mu) g(\mu)$. Toutes ces fonctions étant des fonctions limites de suites croissantes de polynomes, il y correspond des formes bien déterminées que nous

désignons par $fg_n(A)$, $fg(A)$. Je dis que

$$(9) \qquad fg_n(A) \to fg(A).$$

En effet, soit $p(\mu)$ un polynome quelconque $< f(\mu)g(\mu)$: les points où $f_m(\mu)g_n(\mu) \leq p(\mu)$ forment un ensemble fermé $F_{m,n}$; l'ensemble F_n des points où $f(\mu)g_n(\mu) \leq p(\mu)$ étant l'ensemble limite des ensembles fermés $F_{1,n}$, $F_{2,n}$, ... dont chacun contient les suivants, sera aussi fermé. Enfin, chacun des ensembles fermés F_1, F_2, ... contient les suivants; donc, les ensembles F_n doivent s'évanouir à partir d'un certain rang n ; car, dans le cas contraire, ils admettraient au moins un point commun $\mu^\star$ et l'on aurait $f(\mu^\star)g(\mu^\star) \leq p(\mu^\star)$, contrairement à l'hypothèse faite. Par conséquent, il faut avoir, pour n suffisamment grand, $f(\mu)g_n(\mu) > p(\mu)$, ce qui entraîne $fg_n(A) \geq p(A)$, et par conséquent

$$(10) \qquad \lim_{n=\infty} fg_n(A) \geq p(A).$$

Or, soit $[p_n(\mu)]$ une suite croissante de polynomes tendant vers fg (par exemple $p_n = f_n g_n$), le raisonnement fait s'applique à tous les polynomes $p_n(\mu) - \frac{1}{n}$, et par conséquent

$$(11) \qquad \lim_{n=\infty} fg_n(A) \geq \lim_{n=\infty} \left[p_n(A) - \frac{1}{n} E \right] = fg(A).$$

D'autre part, on a, pour tous les n, $fg_n(\mu) \leq fg(\mu)$, et, par conséquent, $fg_n(A) \leq fg(A)$; il en résulte

$$(12) \qquad \lim_{n=\infty} fg_n(A) \leq fg(A).$$

Enfin, en comparant les inégalités (11) et (12), on obtient le résultat indiqué (9).

Ce résultat établi, le raisonnement sera achevé tout à l'heure. En effet, la correspondance étant multiplicative pour les polynomes, on a

$$f_m(A)\, g_n(A) = f_m g_n(A),$$

et, alors, en vertu de la formule (8),

$$f(A)\, g_n(A) = fg_n(A).$$

La même formule (8) donne

$$f(A)g_n(A) \to f(A)g(A).$$

Par conséquent, on a

$$fg_n(A) \to f(A)g(A).$$

En comparant cette formule à la formule (9), on obtient

$$fg(A) = f(A)g(A),$$

c'est-à-dire que la correspondance est multiplicative.

Ajoutons encore une remarque que nous utiliserons plus tard. Le raisonnement qui nous a servi à établir la formule (9) implique aussi la proposition plus générale : *Lorsqu'une suite de fonctions du type f* (c'est-à-dire bornées et limites de suites croissantes de polynomes) *tend en croissant vers une fonction de même type, les formes correspondantes tendent vers la forme qui correspond à la fonction limite.*

92. Il nous resterait encore à caractériser d'une façon plus détaillée le champ fonctionnel élargi. Comment reconnaître si une fonction donnée y appartient ou non? Mais nous n'avons pas à insister sur cette question bien intéressante, intimement liée à l'étude des fonctions dites *semi-continues*. Pour les applications qui suivent, quelques remarques suffisent. Je dis que : 1° *toutes les fonctions continues*, 2° *toutes les fonctions bornées et limites de suites croissantes ou décroissantes de fonctions continues appartiennent à notre champ*. Les premières sont en même temps du type f et du type $-f$; les fonctions limites de suites croissantes sont du type f et celles de suites décroissantes sont du type $-f$. En effet, soit $f(\mu)$ une fonction continue, et soit $p_n(\mu)$ un polynome qui approche la fonction $f(\mu) - \frac{1}{2^n}$ à $\frac{1}{2^{n+2}}$ près; la suite $[p_n(\mu)]$ tend en croissant vers $f(\mu)$. Pour une fonction qui est la limite d'une suite croissante de fonctions continues $f_n(\mu)$, on choisira le polynome $p_n(\mu)$ de sorte qu'il approche à $\frac{1}{2^{n+2}}$ près la fonction continue $f_n(\mu) - \frac{1}{2^n}$.

APPLICATION DE LA CORRESPONDANCE

AU CALCUL DE LA RÉCIPROQUE $(\lambda E - A)^{-1}$ ET A L'ÉTUDE DU SPECTRE.

93. La correspondance entre les fonctions $f(\mu)$ et les formes quadratiques $f(A)$ que nous venons d'établir, fournira sur-le-champ la réciproque de $\lambda E - A$ et aussi d'autres formes quadratiques qui lui sont liées et qu'on appelle les *formes spectrales*.

En effet, soit λ une quantité réelle située au dehors de l'intervalle (m, M). La fonction $f(\mu) = \frac{1}{\lambda - \mu}$ étant continue sur l'intervalle (m, M), il y correspondra une forme $f(A)$. D'autre part, à la fonction $g(\mu) = \lambda - \mu$ correspond la forme $\lambda E - A$. Enfin, au produit $f(\mu) g(\mu) = 1$ correspond la forme E. Par conséquent, on a

$$f(A)(\lambda E - A) = (\lambda E - A) f(A) = E;$$

c'est-à-dire, la substitution $f(A)$ est la réciproque de $\lambda E - A$.

Pour λ complexe, on raisonnera en séparant, dans f et g, les parties réelles de celles purement imaginaires. Soit $f_1(\mu) + if_2(\mu)$ la forme décomposée de $f(\mu) = \frac{1}{\lambda - \mu}$; nous posons, par définition, $f(A) = f_1(A) + if_2(A)$. La substitution $f(A)$ ainsi définie sera la réciproque de $\lambda E - A$.

En résumé, la correspondance entre les fonctions continues $f(\mu)$ et les formes $f(A)$ permet de conclure l'existence d'une *réciproque* $(\lambda E - A)^{-1}$ pour toute valeur du paramètre λ, sauf pour celles situées sur l'axe réel et comprises entre m et M. De plus, chaque suite de fonctions continues $f_n(\mu)$ qui tend vers $\frac{1}{\lambda - \mu}$ uniformément ou de sorte que la série $\Sigma |f_{n+1}(\mu) - f_n(\mu)|$ soit bornée, fournit un procédé pour calculer la réciproque $(\lambda E - A)^{-1}$. Ainsi, en particulier, pour les valeurs assez grandes de $|\lambda|$, on a

$$(\lambda E - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} E + \frac{1}{\lambda^2} A + \frac{1}{\lambda^3} A^2 + \ldots,$$

conformément au n° 73.

94. L'emploi de fonctions discontinues nous permettra de pousser plus loin l'étude de notre correspondance. Soit $f(\mu)$

une fonction continue dans l'intervalle (m, M), extrémités comprises. On peut supposer que la fonction soit définie de $-\infty$ à $+\infty$; on complétera la définition en posant, par exemple, $f(\mu) = f(m)$ pour $\mu < m$ et $f(\mu) = f(M)$ pour $\mu > M$. On pourrait aussi rester dans l'intervalle (m, M) ; mais, dans ce cas, l'écriture aurait quelques inconvénients. En tout cas, il suffira de considérer, au lieu de $(-\infty, +\infty)$, un intervalle fini $(m-\varepsilon, M+\varepsilon)$, ε désignant une quantité positive arbitrairement petite. Pour fixer les idées, nous nous servirons de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Cela étant, décomposons l'intervalle $(-\infty, \infty)$ en des intervalles partiels I_k (k variant de $-\infty$ à $+\infty$), de sorte que l'oscillation de $f(\mu)$ dans chacun de ces intervalles soit $\leqq \omega$. Désignons par μ_k un point arbitraire de l'intervalle I_k. Je définis la fonction discontinue f' comme suit : $f' = f(\mu_k)$ à l'intérieur et à l'extrémité gauche ξ_k de l'intervalle I_k et cela pour tous les k. La fonction f' étant la limite d'une suite croissante de fonctions continues, la correspondance établie lui attache une forme bien déterminée $f'(A)$. Introduisons encore les fonctions $f_\xi(\mu)$ coordonnées à chaque point ξ et définies comme suit : $f_\xi(\mu) = 1$ pour $\mu < \xi$ et $= 0$ pour $\mu \geqq \xi$. Pour simplifier l'écriture, nous posons $f_\xi(A) = A_\xi$. Pour $\xi \leqq m$, on aura $A_\xi = 0$ et, pour $\xi > M$, on aura $A_\xi = E$.

Cela posé, on a évidemment

$$f'(\mu) = \sum_k f(\mu_k)\left[f_{\xi_{k+1}}(\mu) - f_{\xi_k}(\mu)\right],$$

et par conséquent

$$f'(A) = \sum_k f(\mu_k)(A_{\xi_{k+1}} - A_{\xi_k}). \tag{13}$$

D'autre part, la différence $f - f'$ étant comprise entre $-\omega$ et ω, $f(A) - f'(A)$ sera comprise entre $-\omega E$ et ωE. Par suite, en calculant $f'(A)$, on aura aussi calculé, à ωE près, la forme $f(A)$. C'est-à-dire, le second membre de (13) donne une expression approchée, à ωE près, de la forme $f(A)$. Or, on peut supposer la quantité ω arbitrairement petite ; pour cela, on n'aura qu'à choisir suffisamment petite la longueur des intervalles I_k. Il en

résulte, en passant à la limite,

$$(14)\qquad f(\mathrm{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, d\mathrm{A}_\xi;$$

où nous entendons, par ce dernier symbole, la limite de l'expression (13) pour $\omega \to 0$. Ce n'est pas une intégrale au sens ordinaire, mais la manière dont elle vient d'être définie est tout analogue à la définition classique de Riemann. La forme $\mathrm{A}_\xi(x, x)$ y est envisagée comme fonction du paramètre ξ, et notre intégrale (14) est du type $\int f(\xi)\, d\alpha(\xi)$, considéré pour la première fois par Stieltjes dans son célèbre Mémoire *Recherches sur les fonctions discontinues* (¹).

Quelques remarques suffiront pour faire voir la nature de l'intégrale de Stieltjes. Lorsque $\alpha(\xi) = \xi$ entre a et b et constante d'ailleurs, on retombe sur l'intégrale $\int_a^b f(\xi)\, d\xi$. Lorsque $f(\xi)$ et $\alpha(\xi)$ sont continues et que $\alpha(\xi)$ admet une dérivée $\alpha'(\xi)$ dont elle est l'intégrale indéfinie, l'intégrale $\int f(\xi)\, d\alpha(\xi)$ se transforme immédiatement dans l'autre : $\int f(\xi)\, \alpha'(\xi)\, d\xi$. Le grand avantage que présente la notion de Stieltjes consiste en ce qu'elle s'applique aussi à des fonctions $\alpha(\xi)$ qui ne sont pas intégrales indéfinies, et qu'elle s'adapte même à certaines fonctions discontinues. Ainsi, par exemple, étant donnée une infinité dénombrable de valeurs distinctes ξ_k et des valeurs correspondantes a_k telles que $\Sigma |a_k|$ converge, on définira une fonction $\alpha(\xi)$ en posant

$$\alpha(\xi) = \sum a_k,$$

la sommation s'étendant à tous les k tels que $\xi_k < \xi$. Sous cette hypothèse, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, d\alpha(\xi)$$

existe pour toute fonction continue et bornée $f(\xi)$, et elle fournit

(¹) *Académie des Sciences : Mémoires présentés par divers savants*, t. XXXII, n° 2. — *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VIII, 1894, p. 1-122; t. IX, 1895, p. 1-47.

la somme de la série

$$\sum_k a_k f(\xi_k).$$

95. Revenons à la formule (14). Elle donne l'expression analytique, analogue à (5), de toute forme $f(A)$ correspondant à une fonction continue $f(\mu)$ [1]. En particulier, en posant $f(\mu) = \frac{1}{\lambda - \mu}$, il vient

$$(15) \qquad (\lambda E - A)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dA_\xi}{\lambda - \xi}.$$

Cette formule porte sur toute valeur de λ, sauf peut-être sur les valeurs réelles. Grâce à une convention que nous allons faire, elle portera aussi sur toute valeur réelle et ordinaire, c'est-à-dire telle que la réciproque $(\lambda E - A)^{-1}$ existe. En fait, convenons de supprimer, dans l'expression approchée (13) de l'intégrale (14), les termes tels que $A_{\xi_{k+1}} - A_{\xi_k}$ s'annule; pour les fonctions $f(\mu)$ qui ne deviennent pas infinies, le sens de l'intégrale n'en sera pas modifié. Cette convention faite, on voit d'abord sans difficulté que (15) est applicable pour toute valeur de λ située au dehors de l'intervalle (m, M); en effet, dans le voisinage de $\xi = \lambda$, A_ξ reste constante. Je dis que (15) tient pour toute valeur ordinaire de λ. Supposons, en fait, que la fonction non décroissante de ξ A_ξ ne reste constante dans aucun des intervalles qui contiennent λ; en particulier, elle ne le restera pas dans l'intervalle $I = (\lambda - h, \lambda + h)$. Posons $f(\mu) = 1$ à l'intérieur et à l'extrémité gauche de I et zéro d'ailleurs; on a évidemment $f^2(\mu) = f(\mu)$ et, par conséquent,

---

[1] Il y a ici lieu d'observer que la correspondance considérée entre dans la catégorie des opérations linéaires, dont M. Hadamard a donné l'expression analytique comme limites d'intégrales [*Sur les opérations fonctionnelles* (*Comptes rendus*, 9 février 1903)] et que j'ai réussi à exprimer par une seule intégrale, en utilisant l'intégrale de Stieltjes [*Sur les opérations fonctionnelles linéaires* (*Comptes rendus*, 29 novembre 1909)]. *Cf.* aussi le Mémoire plus détaillé : *Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales* (*Ann. de l'École Normale*, 1911, p. 31-62) et, en particulier, pour la correspondance ici envisagée, ma Note citée p. 124.

On pourrait aussi aisément étendre la formule (14) aux formes qui correspondent à des fonctions discontinues; pour cela, on n'aurait qu'à modifier plus ou moins la définition de Stieltjes.

Cf. encore sur ce sujet : LEBESGUE, *Sur les intégrales de Stieltjes et les opérations fonctionnelles linéaires* (*Comptes rendus*, 12 janvier 1910).

$f(A) \cdot f(A) = f(A)$. D'autre part, d'après l'hypothèse faite, la forme non négative $f(A) = A_{\lambda+h} - A_{\lambda-h}$ ne s'annulera pas partout, c'est-à-dire qu'il sera > 0 pour au moins un système (x_k). Soit (y_k) le système qu'on déduit de (x_k) en y appliquant la substitution $f(A)$; on a $E(y, y) = f(A)(x, x) > 0$; donc $(y_k) \neq (0)$. De plus, moyennant la substitution $f(A)$, le système (y_k) se reproduit. Par suite, appliquer à (y_k) la substitution $(\lambda E - A)^2$, revient à y appliquer la substitution $(\lambda E - A)^2 f(A)$. Or, cette dernière substitution correspond à la fonction $g(\mu) = (\lambda - \mu)^2 f(\mu)$ dont l'ensemble des valeurs reste compris entre zéro et h^2. Par conséquent, en désignant par (y'_k) ce que devient (y_k) lorsqu'on y applique la substitution $\lambda E - A$, on a

$$(16) \qquad \frac{\sum_{k=1}^{\infty} y_k'^2}{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2} = \frac{(\lambda E - A)^2(y, y)}{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2} \leq \frac{h^2 E(y, y)}{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2} = h^2.$$

Mais la quantité h^2 pourra être choisie aussi petite que l'on voudra ; d'après l'hypothèse faite, il y aura toujours un système correspondant (y_k). C'est-à-dire que moyennant un choix convenable de (y_k), le premier membre de (16) pourra être rendu infiniment petit. Par suite, dans l'hypothèse faite, $\lambda E - A$ n'admet pas de réciproque ; la valeur λ est singulière.

Pour résumer, appelons avec M. Hilbert le *spectre* de la forme A l'ensemble des valeurs λ telles que A_ξ ne reste constante dans aucun des intervalles $(\lambda - h, \lambda + h)$. Alors, le résultat que nous venons d'établir peut être énoncé comme il suit : *Les points du spectre représentent des valeurs singulières par rapport à la substitution* A ; *pour toute autre valeur de* λ, *la réciproque* $(\lambda E - A)^{-1}$ *existe et sera fournie par l'intégrale* (15). En particulier, lorsque $\lambda = 0$ n'appartient pas au spectre, la réciproque A^{-1} existe et l'on a

$$A^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dA_\xi}{\xi}.$$

Le spectre est contenu dans l'intervalle (m, M), extrémités comprises. De plus, *les deux extrémités m et M appartiennent toujours au spectre.* En effet, le spectre constitue, d'après sa défi-

nition, un ensemble fermé ; soient m' et M' ses deux extrémités. Alors la forme A_ξ, considérée comme fonction de ξ, sera constante pour $\xi < m'$ et pour $\xi > M'$; par conséquent, on peut remplacer dans (14) les limites d'intégration par $m' - \varepsilon$ et $M' + \varepsilon$, où ε désigne une quantité positive arbitrairement petite. Appliquée aux fonctions $f(\xi) = 1$, $f(\xi) = \xi$, la formule ainsi modifiée donne

$$\int_{m'-\varepsilon}^{M'+\varepsilon} dA_\xi = E, \quad \int_{m'-\varepsilon}^{M'+\varepsilon} \xi \, dA_\xi = A ;$$

de là, en observant que A_ξ est monotone, on déduit les inégalités

$$m'E \leqq A \leqq M'E.$$

Par suite, $m' \leqq m$ et $M' \geqq M$. Mais, d'autre part, il n'y a pas de valeurs singulières en dehors de l'intervalle (m, M) ; donc, on aura précisément $m' = m$ et $M' = M$.

96. Pour pousser encore plus loin l'étude du spectre, introduisons, à côté de A_ξ, une autre forme $P_\xi(x, x)$, dépendant de même du paramètre ξ. Nous entendons par là, pour chaque valeur déterminée de ξ, la forme qui correspond à la fonction $f_\xi(\mu) = 0$ pour $\mu \gtrless \xi$ et 1 pour $\mu = \xi$. Quant à cette forme, on a, d'après II, $P_\xi \geqq 0$; de plus, d'après I et II, on a pour tout nombre fini de points distincts $\xi_1, \ldots, \xi_n$: $P_{\xi_1} + P_{\xi_2} + \ldots + P_{\xi_n} \leqq E$. De là, il ressort aisément que l'ensemble des points ξ, pour lesquels P_ξ ne s'annule pas identiquement, est, s'il en existe, fini ou dénombrable. On appelle cet ensemble le *spectre ponctuel* de la forme A.

Voici encore quelques propriétés de la forme P_ξ qui ressortent immédiatement de sa définition. La relation $f_\xi^2 = f_\xi$ fournit $P_\xi^2 = P_\xi$ et, pour $\xi_1 \neq \xi_2$, la relation $f_{\xi_1} f_{\xi_2} = 0$ donne $P_{\xi_1} P_{\xi_2} = 0$. Les relations $f_\xi \mu = \mu f_\xi = \xi f_\xi$ donnent $P_\xi A = A P_\xi = \xi P_\xi$.

De la dernière de ces relations, il vient l'identité fondamentale $(\lambda E - A) P_\lambda = 0$. Elle nous apprend que tout système (y_k) qu'on déduit d'un système (x_k), en y appliquant la substitution P_λ, fournit une solution du système homogène

$$(17) \qquad \lambda y_i - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} y_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Or, supposons que λ appartienne au spectre ponctuel. Dans ce

cas, d'après la définition du spectre ponctuel, il existe des systèmes (x_k) tels que

$$E(y, y) = P_\lambda^2(x, x) = P_\lambda(x, x) \neq 0.$$

Par conséquent, pour toute valeur λ appartenant au spectre ponctuel, il existe des solutions non nulles du système homogène (17).

Inversement, supposons que le système homogène (17) admette une solution (y_k) non nulle, c'est-à-dire telle que $E(y; y) \neq 0$. Appliquer à (y_k) la substitution A, revient, d'après (17), à multiplier les y_k par λ. Par conséquent, appliquer à (y_k) la substitution $f(A)$, équivaut à multiplier les y_k par $f(\lambda)$. En particulier, la substitution P_ξ fournira (o) lorsque $\xi \neq \lambda$; et, pour $\xi = \lambda$, elle fera correspondre (y_k) à lui-même. Enfin, $P_\lambda(y, y) = E(y, y)$ sera, par hypothèse, $\neq 0$; donc, λ appartient au spectre ponctuel. Donc, on a le théorème :

Pour que le système (17) *admette une solution non nulle, il faut et il suffit que λ appartienne au spectre ponctuel.*

Il convient encore d'observer que la formule $P_{\xi_1} P_{\xi_2} = 0$ (pour $\xi_1 \neq \xi_2$) implique le résultat que l'on peut aussi aisément établir par une voie plus directe : *Deux solutions du système* (17), *qui correspondent à deux valeurs distinctes de λ, sont orthogonales l'une à l'autre.*

97. Il y a entre les formes A_ξ et P_ξ une relation très intime que nous allons établir. Pour voir cette relation d'une façon nette, introduisons encore la forme $A_\xi^+(x, x)$; nous entendons par là la forme qui correspond à la fonction $f(\mu) = 1$ pour $\mu \leqq \xi$ et 0 pour $\mu > \xi$. Cela étant, on a évidemment $P_\xi = A_\xi^+ - A_\xi$. Envisageons A_ξ et A_ξ^+ comme des fonctions de ξ. Elles sont monotones; lorsque ξ croît, elles croissent aussi ou, au moins, elles ne décroissent pas. Par conséquent, les limites $A_{\xi-0}$, $A_{\xi+0}$, $A_{\xi-0}^+$, $A_{\xi+0}^+$ existent. De plus, comme on a toujours $A_\xi^+ \geqq A_\xi$ et, d'autre part, pour $\varepsilon > 0$, $A_{\xi-\varepsilon}^+ \leqq A_\xi$, $A_{\xi+\varepsilon} \geqq A_\xi^+$, on aura $A_{\xi-0} \leqq A_{\xi-0}^+ \leqq A_\xi$ et $A_{\xi+0}^+ \geqq A_{\xi+0} \geqq A_\xi^+$. Enfin, d'après la proposition énoncée à la fin du n° 91, on a $A_{\xi-0} = A_\xi$ et $A_{\xi+0}^+ = A_\xi^+$. Par conséquent, les deux limites de gauche $A_{\xi-0}$ et $A_{\xi-0}^+$ coïncident et sont $= A_\xi$; de même, $A_{\xi+0} = A_{\xi+0}^+ = A_\xi^+$. C'est-à-dire que les formes A_ξ et A_ξ^+, envisagées comme fonctions

de ξ, sont continues et égales entre elles pour tous les ξ qui n'appartiennent pas au spectre ponctuel; pour les points ξ du spectre ponctuel, elles sont distinctes et ne restent continues que si $P_\xi(x, x) = 0$; en général, elles y *subissent un changement brusque égal à* $P_\xi(x, x)$.

Ajoutons, ce qui est presque évident, que dans la plupart des raisonnements qui précèdent, par exemple dans la formule (14), on peut remplacer A_ξ par $A_{\underline{\xi}}$, ou, à cause de la symétrie, par $\frac{1}{2}(A_\xi + A_{\underline{\xi}})$.

98. Les considérations précédentes permettent de décomposer la forme A, avec M. Hilbert, en deux formes plus spéciales. L'une de ces formes admettra, sauf peut-être pour le point $\xi = 0$ qui jouera un rôle exceptionnel, le même spectre ponctuel et les mêmes formes P_ξ que A; le spectre ponctuel de l'autre, s'il en existe, se réduira au point $\xi = 0$.

Faisons d'abord une remarque générale. Supposons que $A = B + C$, les formes B et C étant orthogonales entre elles, c'est-à-dire telles que $BC = CB = 0$. Dans cette hypothèse, on a

$$f(A) = f(B) + f(C) - f(0)E. \tag{18}$$

Cette égalité est évidente lorsque $f(\mu)$ est polynome; pour les autres fonctions considérées, on l'obtient en passant à la limite.

Posons maintenant $P(x, x) = \Sigma P_\xi(x, x)$, en étendant la sommation à tous les ξ ou, ce qui revient au même, aux valeurs ξ qui appartiennent au spectre ponctuel. Les formes P_ξ étant positives et comme on a, pour tout nombre fini de points distincts $\xi_1, \ldots, \xi_n$: $P_{\xi_1} + \ldots + P_{\xi_n} \leqq E$, la série envisagée converge. Or, les relations $P_\xi^2 = P_\xi$ et $P_{\xi_1} P_{\xi_2} = 0$ pour $\xi_1 \neq \xi_2$, donnent, après sommation, $PP_\xi = P_\xi P = P_\xi$, et en sommant de nouveau, $P^2 = P$. Les relations $A^n P_\xi = P_\xi A^n = \xi^n P_\xi$ donnent, après sommation,

$$A^n P = P A^n = \sum \xi^n P_\xi. \tag{19}$$

Par suite, on a

$$AP(A - PA) = (A - AP)PA = APA - AP^2A = APA - APA = 0;$$

et enfin, en posant $AP = PA = B$ et $A - B = C$, on aura

$$BC = CB = 0.$$

Les formes B et C sont orthogonales entre elles et leur somme est A.

Calculons $f(B)$ et $f(C)$. Je dis qu'on a

$$f(B) = \sum f(\xi) P_\xi + f(0)(E - P). \tag{20}$$

En effet, on a $B^n = A^n P^n = A^n P$; donc, d'après (19), $B^n = \Sigma \xi^n P_\xi$. Par conséquent, la formule (20) est vraie pour f polynome. Sans restreindre la généralité, il suffira de l'étendre aux fonctions bornées f qui sont la somme d'une série de polynomes positifs. Or, dans ce cas, les formes P_ξ étant aussi positives, tout revient à intervertir l'ordre de sommation dans une série double à termes positifs, et c'est permis.

Par suite, la formule (20) reste exacte pour toutes les fonctions envisagées.

L'expression pour $f(C)$ se déduit des formules (18) et (20) :

$$f(C) = f(A) - f(0) P - \sum f(\xi) P_\xi. \tag{21}$$

Calculons, en particulier, les formes P'_ξ et P''_ξ, analogues aux P_ξ et correspondant aux formes B et C. Pour cela, il faut poser, dans (20) et (21), $f(\mu) = 1$ pour $\mu = \xi$ et 0 pour $\mu \neq \xi$. Lorsque $\xi \neq 0$, il résulte $P'_\xi = P_\xi$, $P''_\xi = 0$. Pour $\xi = 0$, on aura

$$P'_0 = P_0 + E - P, \qquad P''_0 = P.$$

Donc, *la forme* B *admet, sauf pour* $\xi = 0$, *le même spectre ponctuel et les mêmes formes correspondantes que* A; *quant à la forme* C, *le spectre ponctuel se réduit au point* 0 *et la forme correspondante est* $P = \Sigma P_\xi$.

99. L'importance de la décomposition faite consiste en ce qu'on peut, dans la résolution du système homogène (17), remplacer la forme A par la forme plus spéciale B. Inversement, lorsque l'on connaît l'ensemble des solutions de (17), la forme B en sera univoquement déterminée. Pour le voir, il suffit d'exprimer P_ξ moyennant les solutions qui correspondent à $\lambda = \xi$. Nous avons vu que l'ensemble de ces solutions résulte en appliquant à tout l'espace hilbertien la substitution P_ξ. En l'appliquant

seulement à un sous-ensemble dénombrable partout dense de cet espace et en orthogonalisant [1], on parviendra à définir une suite dénombrable (ou finie) de systèmes (l_k^1), (l_k^2), ..., orthogonaux deux à deux, normés, solutions de (17), et tels que toute solution peut être approchée « fortement » par eux ou par leurs combinaisons linéaires.

Envisageons la forme

$$Q(x, x) = \sum_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} l_k^i x_k \right)^2,$$

et la substitution Q qui y correspond.

Les séries entre parenthèses convergent évidemment. Donc, quand il ne s'agit que d'un nombre fini d'éléments (l_k^i), l'expression au second membre a un sens bien déterminé. De plus, dans ce cas, on voit immédiatement que $Q^2 = Q$ et que, par conséquent, $(E - Q)^2 = E - Q$. Par suite, $E(x, x) - Q(x, x)$ est une forme positive, c'est-à-dire $Q(x, x) \leqq E(x, x)$. On en conclut immédiatement que l'expression au second membre converge dans tous les cas et reste $\leqq E(x, x)$.

Je dis que $P_\xi = Q$. En effet, chacun des éléments (l_k) se reproduit lorsqu'on y applique P_ξ, puisque (l_k) est solution de (17), et comme les (l_k) sont orthogonaux entre eux et normés, ils se reproduisent aussi lorsqu'on y applique la substitution Q. Par conséquent, $P_\xi - Q$ appliquée à l'un quelconque des systèmes (l_k), donne zéro. Mais il en sera de même pour toutes les solutions de (17), car elles peuvent être approchées indéfiniment par les combinaisons linéaires des (l_k). Enfin, on a $P_\xi^2 = P_\xi$ et $QP_\xi = Q$, $(P_\xi - Q)P_\xi = P_\xi - Q$; donc, appliquer $P_\xi - Q$ à un système, revient à y appliquer d'abord P_ξ et puis $P_\xi - Q$; mais, en appli-

---

[1] *Cf.* le n° 50. Là, il s'agissait d'orthogonaliser les équations elles-mêmes ; ici, on orthogonalise les solutions par un procédé tout analogue. Après les avoir numérotées, on supprime celles qui sont des combinaisons linéaires des précédentes et on numérote de nouveau, puis on ajoute à chacune d'elles une combinaison linéaire de celles qui précèdent, et cela de sorte que la solution ainsi modifiée devienne orthogonale aux précédentes. Enfin, on multiplie par des constantes convenables, de sorte qu'on ait

$$\sum_{k=1}^{\infty} (l_k^i)^2 = 1.$$

quant P_ξ, il résulte une solution de (17); et $P_\xi - Q$, appliquée à cette solution, donne zéro. Par suite, $P_\xi - Q$ transforme en zéro tout l'espace hilbertien; donc $P_\xi = Q$.

Ayant décomposé de cette façon chacune des formes quadratiques P_ξ en des carrés de formes linéaires, nous voilà aussi arrivé, grâce à la formule $B = \Sigma \xi P_\xi$, à décomposer d'une façon analogue, la forme B; on n'a qu'à remplacer chacun des P_ξ par la somme Q qui y correspond. Donc, la forme particulière B admet une décomposition analogue à (2); seulement la sommation s'étend peut-être à une infinité dénombrable de carrés. Mais dans le cas général, lorsqu'on détache de la forme A la partie B qui correspond aux solutions du système (17), il reste encore une forme C. La forme C est aussi d'un caractère particulier : son spectre ponctuel, s'il en existe, se réduit au point $\xi = 0$; la forme C_ξ est fonction continue de ξ, sauf peut-être pour $\xi = 0$; et par conséquent, en excluant, s'il est isolé, le point o, le spectre de C constitue un ensemble parfait. On appelle cet ensemble parfait le *spectre continu* de la forme A.

100. Quand A est complètement continue, ces résultats deviennent encore beaucoup plus simples. Dans ce cas, les formes $B = AP$ et alors $C = A - B$ sont aussi complètement continues. Je dis que $C = 0$. En effet, C n'a pas de spectre ponctuel, sauf peut-être le point $\xi = 0$; par suite, pour $\xi \neq 0$, le système homogène qui correspond à $\xi E - C$ n'admet pas de solution. Mais, d'autre part, si un point $\xi \neq 0$ appartenait au spectre de C, ce système pourrait être satisfait avec une approximation arbitraire par des éléments (x_k) tels que $E(x, x) = 1$, c'est-à-dire qu'il existerait une suite d'éléments $(x_k^{(n)})$ tels que $E(x^{(n)}, x^{(n)}) = 1$ et que, de plus, la suite des éléments qu'on obtient, en y appliquant la substitution $\xi E - C$, tend fortement vers (o). De la suite $(x_k^{(n)})$ on pourrait tirer une suite partielle $(x_k^{(n_\nu)})$ tendant vers un élément (x_k^*), et le système homogène $\xi E - C = 0$ admettrait la solution (x_k^*). De plus, C étant fort continue, $C(x_k^{(n_\nu)})$ tendrait fortement vers $C(x_k^*)$ et alors $(x_k^{(n_\nu)})$ tendrait fortement vers sa limite. Donc on aurait $E(x^*, x^*) = 1$, et alors, le système $\xi E - C = 0$ admettrait une solution non nulle. Par conséquent, aucun des points $\xi \neq 0$ n'appartient au spectre, et la forme C_ξ, envisagée comme fonction de ξ,

doit être constante pour $\xi < 0$ et aussi pour $\xi > 0$. Donc on a

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \, dC_\xi = 0.$$

Comme $C = 0$, $A = B$; par suite, $A(x, x)$ admet une décomposition analogue à (2)

$$(22) \quad A(x, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \Big(\sum_{k=1}^{\infty} l_{jk} x_k \Big)^2, \qquad E(x, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} l_{jk} x_k \Big)^2,$$

les formes linéaires $\Sigma l_{jk} x_k$ étant normées et orthogonales deux à deux. Les coefficients μ_j parcourent le spectre de A, en prenant une ou plusieurs fois chacune des valeurs ξ dont il se compose. Pour chacune de ces valeurs, les formes linéaires qui y correspondent s'obtiennent en décomposant la forme P_ξ. Mais tandis que, dans le cas général, la décomposition de P_ξ peut fournir une infinité de termes, il n'en est pas de même dans le cas particulier considéré. Dans ce cas, c'est seulement la valeur $\xi = 0$ qui pourra fournir une infinité de termes; chacune des autres en donne un nombre fini. De plus, je dis que dans ce cas $\mu_j \to 0$; cette assertion implique évidemment le fait indiqué. Montrons donc que $\mu_j \to 0$. La suite des éléments orthogonaux et normés (l_{jk}) $(j = 1, 2, \ldots)$, tend vers (0); en y appliquant la substitution A, on obtient la suite $(\mu_j l_{jk})$; A étant complètement continue, cette suite tend fortement vers (0), c'est-à-dire $\mu_j^2 \to 0$.

En résumé, *toute forme complètement continue* $A(x, x)$ *admet le développement* (22), *et cela de sorte que* $\mu_j \to 0$.

Il est bien naturel de prévoir que l'on peut établir ce résultat par une voie plus directe, sans se servir de la théorie générale du spectre. M. Hilbert a donné une telle démonstration [1]. L'idée essentielle de cette démonstration est fondée sur le fait suivant : la forme complètement continue $A(x, x)$, variée sous la condition que $E(x, x) = 1$, atteint son maximum M pour un élément $(l_k^{(1)})$ et atteint aussi son minimum m pour un élément $(l_k^{(2)})$, et ces éléments satisfont respectivement aux systèmes homogènes $ME - A = 0$, $mE - A = 0$. De plus, si l'on fait varier $A(x, x)$ en imposant aux (x_k) encore la condition d'être orthogonaux à cer-

---

[1] HILBERT, quatrième Mémoire, p. 201.

tains éléments satisfaisant à des systèmes du même type $\rho E - A = 0$, les éléments extrémaux satisfont à des systèmes du même type. Ce fait permet d'épuiser successivement toutes les solutions des systèmes homogènes et conduit alors à l'expression (22).

M. von Koch a montré que, dans le cas où $\sum_i |a_{ii}|$ et $\sum_{i,k} a_{ik}^2$ convergent, on peut aussi obtenir le développement (22) par la méthode des déterminants infinis [1].

LE SPECTRE CONTINU ET LES SOLUTIONS DIFFÉRENTIELLES.

101. Étudions maintenant la forme C qui correspond au spectre continu. Pour plus de simplicité, nous supposerons $C = A$; c'est-à-dire que nous ferons l'hypothèse que la forme A n'admet pas de spectre ponctuel. Les modifications à faire dans le cas général sont presque évidentes; il ne s'y agira que du point $\xi = 0$.

L'hypothèse faite consiste en ce que le système (17) n'admette pour aucune valeur de λ des solutions (x_k) telles que Σx_k^2 converge et $\neq 0$. M. Hilbert a donné un exemple très simple d'une telle forme A. Le voici :

$$A(x, x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + \ldots . \tag{23}$$

Discutons les systèmes (17) qui lui correspondent. Ce sont des systèmes récurrents : après avoir choisi λ et x_1 arbitrairement, on peut calculer successivement x_2, x_3, ... Comme, d'après l'inégalité de Cauchy-Lagrange, on a $-E \leqq A \leqq E$, nous pourrons nous borner à considérer les valeurs λ comprises entre -1 et 1. Posons, avec M. Hellinger, $\lambda = \cos t$ et $x_1 = c \sin t$; on trouvera, par un calcul facile à rétablir, $x_k = c \sin kt$ pour tous les k. De cette façon, en faisant varier t et c, la formule $x_k = c \sin kt$ donnera toutes les solutions de (17) pour $-1 \leqq \lambda \leqq 1$. Or, pour ces solutions, Σx_k^2 ne converge pas. C'est-à-dire qu'au point de vue où nous nous sommes placés, les (x_k) ne sont pas solutions admissibles, et l'on pourrait croire que nos méthodes ne s'appliquent pas à l'étude de ces solutions singulières. Mais la partie n'est pas encore perdue.

---

[1] VON KOCH, *Sur un théorème de M. Hilbert* (*Math. Annalen*, t. LXIX, 1910, p. 266-283).

Envisageons par exemple la solution $x_k(\lambda) = \sin k(\arccos\lambda)$ comme fonction de λ et désignons par y_k les intégrales des $x_k(\lambda)$, prises par rapport à λ le long d'un intervalle I. Comme ky_k demeure borné lorsque $k \to \infty$, la série Σy_k^2 converge. De plus, soient z_k des quantités analogues aux y_k, mais correspondant à un autre intervalle qui n'empiète pas sur I : les éléments (y_k) et (z_k) sont orthogonaux entre eux. On s'en rend compte par un calcul facile, et nous en verrons aussi bientôt les raisons plus profondes.

L'analogie que présentent les intégrales des solutions singulières dans le cas où le spectre ponctuel manque, aux solutions admises dans l'autre cas, a suggéré à M. Hellinger l'idée de fonder sur l'emploi de ces intégrales l'étude du spectre continu, sans s'occuper des solutions elles-mêmes. Mais il y fut aussi conduit forcément par une autre raison importante. Pour exposer cette raison, il me faut d'abord dire à quel point de vue se plaçaient, dans l'étude du spectre, M. Hilbert et son école. On sait bien que la condition nécessaire et suffisante pour que deux formes quadratiques à n variables puissent être transformées l'une dans l'autre par une substitution orthogonale appliquée aux variables, consiste en ce que les valeurs singulières et leurs ordres de multiplicité coïncident. Quelles sont les conditions qui y correspondent dans le cas d'une infinité de variables? En groupant la théorie des formes quadratiques autour de ce problème, il en ressort une certaine délimitation des faits à envisager : on se bornera aux faits qui subsistent lorsqu'on soumet les variables à une substitution orthogonale quelconque; brièvement, on se borne à étudier les *invariants orthogonaux* de la forme quadratique [1]. L'existence

---

[1] La remarque suivante permet de rattacher l'étude des invariants orthogonaux à l'ordre d'idées où nous nous sommes placé. Soit O une substitution réelle et orthogonale, c'est-à-dire telle que, pour ses coefficients o_{ik}, on ait

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} o_{ik}\, o_{jk} = \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{0}, \qquad \sum_{i,j=1}^{\infty} o_{ki}\, o_{kj} = \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{0},$$

suivant que $i =$ ou $\neq j$. Appliquer à l'espace hilbertien la substitution O, revient à remplacer les formes A par les formes OAO^{-1}. Or, on a évidemment

$$f(OAO^{-1}) = Of(A)O^{-1};$$

c'est-à-dire que la correspondance entre les A et les $f(A)$ reste inaltérée.

d'une solution *admissible* du système (17) pour une certaine valeur de λ est un tel invariant; en fait, les solutions admissibles se correspondent moyennant les mêmes substitutions que les formes elles-mêmes. Mais il n'en est pas ainsi pour les solutions (x_k) telles que Σx_k^2 ne converge pas; en fait, les substitutions orthogonales ne sont pas définies pour de tels systèmes, et, dans la plupart des cas, la définition n'y peut pas être étendue.

Envisageons donc x_k comme fonction de λ et supposons qu'il soit permis d'intégrer les équations (17) terme à terme par rapport à λ; en posant

$$\rho_k(\xi) = \int_0^\xi x_k(\lambda)\,d\lambda$$

et en appliquant la notation de Stieltjes, nous obtenons

$$(24)\qquad \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \xi\, d\rho_i(\xi) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}[\rho_k(\lambda_2) - \rho_k(\lambda_1)] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Voici maintenant la notion de *solution différentielle* qui est fondamentale pour la théorie de M. Hellinger. Il entend par là toute suite de fonctions continues $[\rho_k(\xi)]$ telles que $\sum_{k=1}^{\infty}[\rho_k(\xi)]^2$ converge vers une fonction continue et que, de plus, les fonctions $\rho_k(\xi)$ satisfont au système (24) pour toute valeur de λ_1 et de λ_2.

Pour obtenir de telles solutions, appliquons la substitution A_ξ à un système quelconque (x_k) tel que Σx_k^2 converge; il y correspondra, pour toute valeur de ξ, un système bien déterminé $[\rho_k(\xi)]$. Dans l'hypothèse faite sur A, la forme A_ξ est fonction continue de ξ, et il en sera de même quant aux fonctions $\rho_k(\xi)$. De plus, $\Sigma[\rho_k(\xi)]^2$ converge vers $A_\xi^2(x, x) = A_\xi(x, x)$, et c'est une fonction continue de ξ. Enfin, on a

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \xi\, dA_\xi = A(A_{\lambda_2} - A_{\lambda_1});$$

en effet, chacun des deux membres est égal à $f(A)$, f désignant la fonction $= \xi$ pour $\lambda_1 \leqq \xi < \lambda_2$ et zéro d'ailleurs. On en conclut que les fonctions ρ_k satisfont au système (24).

Les solutions différentielles participent, *mutatis mutandis*, de toutes les propriétés essentielles des solutions admises des

systèmes (17); tout cela revient à ce que leur variation sur des petits intervalles se comporte à peu près comme les solutions exactes de (17). On peut s'en servir, entre autres, pour décomposer la forme A en des parties plus simples et pour étudier l'équivalence de deux formes au point de vue des substitutions orthogonales. Pour tous les détails, nous renvoyons le lecteur aux Mémoires originaux [1].

102. Parlons encore d'une classe très intéressante de formes où tous ces raisonnements deviennent beaucoup plus simples; cette classe comprend, entre autres, la forme (23) [2].

Supposons que les fonctions $\varphi_1(\mu)$, $\varphi_2(\mu)$, ..., définies sur l'intervalle (a, b) forment un système orthogonal et normé, c'est-à-dire supposons que

$$\int_a^b \varphi_i(\mu)\varphi_k(\mu) = \begin{matrix}1\\0\end{matrix},$$

suivant que $i \overset{=}{\neq} k$. De plus, nous supposons que pour chaque fonction $f(\mu)$ intégrable et de carré intégrable, on puisse rendre aussi petite qu'on voudra l'intégrale

$$\int_a^b \left[f(\mu) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(\mu) \right]^2 d\mu.$$

---

(1) Hellinger, *Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlich vielen Variabeln* (Thèse), Göttingen, 1907. — *Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen* (*Journ. f. reine u. angew. Math.*, t. CXXXVI, 1909, p. 210-271). Pour ses recherches, M. Hellinger se sert avec grand succès d'une notion très intéressante d'intégrale généralisée, analogue à celle de Stieltjes. Au premier abord, l'emploi de ces intégrales semble indispensable. Tout récemment, M. Hahn a découvert la relation intime que ces intégrales ont avec les intégrales ordinaires au sens de M. Lebesgue, en particulier, avec les fonctions sommables et de carrés sommables dont nous parlerons plus loin; et grâce à cette découverte, il est parvenu à résoudre complètement le problème d'équivalence de deux formes quadratiques. Il a publié ses recherches dans le Mémoire : *Ueber die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen* (*Monatshefte für Mathematik u. Physik*, t. XXIII, 1912, p. 161-224).

(2) Hilbert, quatrième Mémoire, p. 207. M. Hilbert expose seulement le cas particulier où $u(\mu) = \frac{1}{\mu}$. La classe que nous étudions est comprise dans une classe plus étendue, traitée par M. Hellinger.

en choisissant convenablement n et les c_k. On exprime ce dernier fait en disant que le système $[\varphi_k(\mu)]$ est complet [1]. Dans le cas considéré où le système est aussi orthogonal et normé, le choix le plus avantageux des c_k sera fait, pour chaque n, en égalant c_k à

$$f_k = \int_a^b f(\mu)\varphi_k(\mu)\,d\mu,$$

ce qui découle immédiatement de l'égalité

$$\int_a^b \left[f(\mu) - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(\mu)\right]^2 d\mu$$
$$= \int_a^b \left[f(\mu) - \sum_{k=1}^{n} f_k\varphi_k(\mu)\right]^2 d\mu + \sum_{k=1}^{n}(f_k - c_k)^2.$$

Il en résulte que pour n infini

$$\int_a^b [f(\mu)]^2\,d\mu - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 = \int_a^b \left[f(\mu) - \sum_{k=1}^{n} f_k\varphi_k(\mu)\right]^2 d\mu \to 0,$$

---

(1) Comme exemple d'un système orthogonal, normé et complet dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$, citons le système

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\mu,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\mu,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2\mu,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2\mu,\quad \ldots,$$

qui intervient dans la théorie des séries de Fourier. Ce système est évidemment orthogonal et normé. Pour voir qu'il est aussi complet, il suffit par exemple de rappeler le théorème bien connu de Weierstrass, d'après lequel toute fonction continue et de période 2π peut être approchée uniformément par des polynomes trigonométriques, en observant, de plus, que pour chaque fonction $f(\mu)$ intégrable et de carré intégrable, l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(\mu) - \varphi(\mu)]^2\,d\mu$$

peut être rendue arbitrairement petite, en choisissant convenablement la fonction $\varphi(\mu)$ continue et de période 2π.

La formule (24), appliquée au cas particulier envisagé, constitue ce que l'on appelle le *théorème de Parseval* ou aussi théorème fondamental des constantes de Fourier. — *Cf.* HURWITZ, *Ueber die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen* (*Mathematische Annalen*, t. LVII, 1903, p. 425-446; t. LIX, 1904, p. 553). — FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (*Acta mathematica*, t. XXX, 1906, p. 335-400).

Tous les systèmes dont il s'agira dans la suite peuvent être ramenés aisément au cas considéré.

c'est-à-dire que

$$\int_a^b [f(\mu)]^2\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2.$$

Enfin, en appliquant cette formule à $\frac{1}{2}[f(\mu)+g(\mu)]$ et à $\frac{1}{2}[f(\mu)-g(\mu)]$, et en retranchant, on obtient

$$(24)\qquad \int_a^b f(\mu)\,g(\mu)\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f(\mu)\,\varphi_k(\mu)\,d\mu \int_a^b g(\mu)\,\varphi_k(\mu)\,d\mu;$$

les fonctions f et g sont supposées intégrables ainsi que leurs carrés.

Toutes ces considérations, valables quand on donne au mot *intégrale* le sens que lui a attribué M. Lebesgue, restent valables à plus forte raison pour la notion d'intégrale classique. Nous admettrons, pour fixer les idées, que les fonctions envisagées soient continues ou se composent d'un nombre fini de traits continus. Cela étant, posons

$$a_{ik} = \int_a^b u(\mu)\,\varphi_i(\mu)\,\varphi_k(\mu)\,d\mu, \qquad \mathrm{A}(x,x) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}\,x_i\,x_k.$$

Les réduites $[\mathrm{A}(x,x)]_n$, $[\mathrm{E}(x,x)]_n$ seront fournies évidemment par les intégrales

$$\int_a^b u(\mu)\left[\sum_{k=1}^{n} x_k\,\varphi_k(\mu)\right]^2 d\mu, \qquad \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} x_k\,\varphi_k(\mu)\right]^2 d\mu;$$

par conséquent, la forme $\mathrm{A}(x,x)$ est bornée et l'ensemble de ses valeurs est compris, pour $\mathrm{E}(x,x)=1$, entre les bornes inférieure et supérieure de la fonction $u(\mu)$. De plus, soit $\mathrm{A}^*(x,x)$ la forme définie de façon analogue, à l'aide d'une fonction $u^*(\mu)$; en posant, dans (24), $f(\mu)=u(\mu)\,\varphi_i(\mu)$, $g(\mu)=u^*(\mu)\,\varphi_k(\mu)$, on trouve l'expression des coefficients de AA^* :

$$\int_a^b u(\mu)\,u^*(\mu)\,\varphi_i(\mu)\,\varphi_k(\mu)\,d\mu.$$

En particulier, les coefficients de A^2, A^3, ... se calculent en remplaçant $u(\mu)$ par $u^2(\mu)$, $u^3(\mu)$, ... dans l'expression de a_{ik}.

Donc, les coefficients de $f(A)$ s'expriment par l'intégrale

$$\int_a^b f[u(\mu)]\varphi_i(\mu)\varphi_k(\mu)\,d\mu.$$

Cette expression pour les coefficients de $f(A)$ permet d'aborder sur-le-champ l'étude du spectre et des formes spectrales. Soient $\mathfrak{E}_\xi$, $\mathfrak{E}_\xi^*$, $\mathfrak{E}_\xi'$ les ensembles des valeurs μ pour lesquelles on a respectivement $u(\mu) < \xi$, $u(\mu) \leq \xi$, $u(\mu) = \xi$; les coefficients de A_ξ, A_ξ^*, P_ξ sont fournis par l'intégrale

$$\int \varphi_i(\mu)\varphi_k(\mu)\,d\mu.$$

étendue respectivement aux ensembles $\mathfrak{E}_\xi$, $\mathfrak{E}_\xi^*$, $\mathfrak{E}_\xi'$. Si, par exemple, $u(\mu)$ est continue et admet m et M comme valeurs extrêmes, le spectre sera formé par l'intervalle (m, M); si elle ne passe pas par la valeur ξ ni par les valeurs voisines, ξ et son voisinage n'appartiennent pas au spectre; enfin, si elle prend la valeur ξ le long d'un intervalle, ξ appartient au spectre ponctuel.

La forme (23) rentre dans la classe considérée en posant

$$a = 0, \qquad b = \pi, \qquad \varphi_k(\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin k\mu, \qquad u(\mu) = \cos\mu.$$

103. Considérons encore un autre cas particulier qui est intimement lié à la théorie des séries trigonométriques. Pour étudier ce cas, il sera avantageux de modifier l'écriture en faisant varier les indices de $-\infty$ à $+\infty$. Cette modification revient seulement à numéroter d'une autre façon les variables x_k, et, par conséquent, elle n'exerce aucune influence sur les résultats essentiels de la théorie exposée.

Posons

$$a = -\pi, \quad b = \pi, \quad \varphi_k(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sin k\mu + \cos k\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\left(k\mu - \frac{\pi}{4}\right).$$

Lorsque k parcourt tous les nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$, $\varphi_k(\mu)$ parcourt un système orthogonal, normé et complet. Envisageons la forme

$$A(x, x) = \sum_{i,k=-\infty}^{+\infty} a_{ik}x_i x_k.$$

où

$$a_{ik} = \int_{-\pi}^{\pi} u(\mu)\varphi_i(\mu)\varphi_k(\mu)\,d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\mu)\cos(i-k)\mu\,d\mu + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\mu)\sin(i-k)\mu\,d\mu.$$

Donc, en désignant par α_{i-k} et β_{i+k} les deux termes du dernier membre, $A(x, x)$ est la somme des deux formes

$$A^{(1)}(x, x) = \sum_{i,k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{i-k} x_i x_k, \qquad A^{(2)}(x, x) = \sum_{i,k=-\infty}^{+\infty} \beta_{i+k} x_i x_k;$$

la forme $A^{(1)}$ correspond à la fonction paire

$$u^{(1)}(\mu) = \frac{u(\mu) + u(-\mu)}{2},$$

la forme $A^{(2)}$ correspond à la fonction impaire

$$u^{(2)}(\mu) = \frac{u(\mu) - u(-\mu)}{2}.$$

On voit que ces deux formes appartiennent à des types très particuliers. Le premier de ces types, qui correspond aux fonctions paires, fut considéré pour la première fois par M. Tœplitz ; nous en parlerons dans le Chapitre suivant. Le second type correspond aux fonctions impaires. Posons, par exemple, $u(\mu) = -\pi - \mu$ pour $\mu < 0$ et $\pi - \mu$ pour $\mu > 0$; les intégrales considérées donnent $a_{ik} = \frac{1}{i+k}$ quand $i + k \neq 0$ et $a_{ik} = 0$ au cas contraire. Les valeurs extrêmes de $u(\mu) = \mu$ dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ sont π et $-\pi$; donc π et $-\pi$ sont aussi les bornes supérieure et inférieure de la forme $A(x, x)$, et alors (d'après le n° 85) de la forme bilinéaire $A(x, y)$. Ces formes comprennent en particulier les formes considérées par M. Hilbert :

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{x_i x_k}{i+k}, \qquad \sum_{i,k=1}^{\infty}{}' \frac{x_i y_k}{i-k}.$$

où l'accent ajouté au second Σ indique qu'il faut supprimer les termes qui correspondent à $i = k$. La première des deux formes résulte de $A(x, x)$ en posant $x_0 = x_{-1} = x_{-2} = \ldots = 0$; la seconde

se déduit de $\Lambda(x, y)$ en posant $x_0 = x_{-1} = x_{-2} = \ldots = 0$, $y_0 = y_1 = y_2 = \ldots = 0$ et en renversant encore les signes des indices des y. Donc, ces deux formes restent aussi comprises, pour $E(x, x) = 1$, $E(y, y) = 1$, entre $-\pi$ et π.

L'intérêt particulier que l'on attache à ces formes est motivé par le fait qu'elles appartiennent, pour ainsi dire, à la frontière de l'ensemble des formes bornées. En fait, il y a des expressions très voisines qui ne représentent pas des formes bornées. Considérons, par exemple, l'expression

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{x_i x_k}{(i+k)^\alpha},$$

où $\alpha < 1$; en y posant $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0$, ce qui est conforme à l'hypothèse $E(x, x) = 1$, les termes tels que $i + k \leqq n + 1$ sont tous $\geqq \frac{1}{n(n+1)^\alpha}$; et comme il y en a $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, la valeur de l'expression dépasse $\frac{1}{2}(n+1)^{1-\alpha}$. Donc cette valeur croît indéfiniment avec n. De même, en posant $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $x_{n+1} = \ldots = 0$ dans l'expression

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}{}' \frac{x_i x_k}{|i-k|},$$

on obtient $2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) - 2\,\frac{n-1}{n}$, et cette expression croît aussi indéfiniment avec n (1).

---

(1) Ce dernier fait peut être exprimé en disant que la forme bilinéaire bornée $\sum{}' \frac{x_i y_k}{i-k}$ n'est pas absolument bornée. Il fut indiqué par MM. Hellinger et Tœplitz dans leur Mémoire cité au n° 57, p. 308. *Cf.* aussi pour des formes analogues : TŒPLITZ, *Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen* (*Nachr. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 1910, p. 489-506, et I. SCHUR, *Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen* (*Journ. f. reine u. angew. Math.*, t. CXL, 1911, p. 1-28).

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS.

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

104. En étudiant, dans le Chapitre II, la méthode des déterminants infinis, nous avons dit que cette méthode fut inventée et appliquée pour la première fois à l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + (\theta_0 + 2\theta_1 \cos t + 2\theta_2 \cos 2t + \ldots) w = 0 \tag{1}$$

par M. Hill. Le raisonnement du savant astronome, trop succinct pour le géomètre pur, fut perfectionné et justifié pleinement par Poincaré, et nous avons exposé le raisonnement de ce dernier et aussi les recherches ultérieures concernant la convergence des déterminants infinis et leur application aux systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Mais nous ne sommes plus revenus à l'équation (1). Nous le faisons maintenant; seulement, au lieu de considérer l'équation particulière (1) ([1]), nous nous placerons avec M. von Koch dans un ordre d'idées plus général.

Envisageons l'équation différentielle linéaire d'ordre n sans second membre

$$\frac{d^n u}{dz^n} + P_1(z) \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + P_2(z) \frac{d^{n-2} u}{dz^{n-2}} + \ldots + P_n(z) u = 0, \tag{2}$$

où les coefficients $P_1(z)$, ..., $P_n(z)$ admettent les développements en série de Laurent

$$P_m(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{mk} z^k, \tag{3}$$

([1]) L'équation (1) fut étudiée d'une façon détaillée par POINCARÉ, *loc. cit.* (nos 17 et 19).

convergeant à l'intérieur de l'anneau circulaire $r < |z| < R$. On sait, d'après les recherches de Fuchs, qu'il existe au moins une intégrale de la forme

$$u(z) = z^{\rho} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k z^k,$$

où la série de Laurent converge à l'intérieur de l'anneau. Nous nous proposons de déterminer la constante ρ et les coefficients α_k, de sorte que $u(z)$ représente une intégrale de l'équation (2).

L'équation (1) entre évidemment dans le type envisagé si l'on suppose que la fonction $\theta(t) = \theta_0 + 2\theta_1 \cos t + \ldots$ est holomorphe pour les valeurs réelles de t, et si, de plus, on fait le changement de variables $z = e^{it}$.

105. Observons tout d'abord qu'on peut supposer, sans restreindre la généralité, $P_1(z) = 0$ et $r < 1 < R$. En effet, ces deux hypothèses reviennent à remplacer u par $u' = u e^{-\frac{1}{n}\int P_1(z)\,dz}$ et z par $z' = z\sqrt{Rr}$; l'équation ainsi modifiée satisfait évidemment aux hypothèses faites.

Cela étant, remplaçons dans l'équation (2) les fonctions $P_m(z)$ et $u(z)$ par leurs développements; la comparaison des coefficients donne pour ρ et les α_k les équations

$$(4) \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_{i-k}(\rho + k)\alpha_k = 0 \qquad (i = -\infty \ldots +\infty),$$

où

$$\varphi_0(\rho) = \rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+1) \\ + \rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+3)a_{2,-2} + \ldots + \rho a_{n-1,-n+1} + a_{n,-n},$$

et, pour $j \neq 0$,

$$\varphi_j(\rho) = \rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+3)a_{2,j-2} + \ldots + \rho a_{n-1,j-n+1} + a_{n,j-n}.$$

Pour mettre le système (4) sous la forme

$$(5) \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_{ik}(\rho)\alpha_k = 0 \qquad (i = -\infty \ldots +\infty),$$

de sorte que $\psi_{ii} = 1$ pour tous les i, posons

$$\psi_{ik}(\rho) = \frac{\varphi_{i-k}(\rho - k)}{\varphi_0(\rho - i)}.$$

Soient $\rho_1, \ldots, \rho_n$ les racines de l'équation $\varphi_0(\rho) = 0$; alors les pôles des fonctions rationnelles $\psi_{ik}(\rho)$ appartiennent à l'ensemble des valeurs $\rho_1 - i, \ldots, \rho_n - i$ $(i = -\infty \ldots +\infty)$ qui sont racines de l'une ou l'autre des équations $\varphi_0(\rho + i) = 0$. Envisageons maintenant dans le plan de la variable ρ un domaine D fini ou infini situé entre deux droites parallèles à l'axe des imaginaires et tel qu'aucune de ces racines ne se trouve au dedans ou sur la frontière de D. Nous allons montrer que la série

$$(6) \qquad \sum_{\substack{i,k=-\infty \\ (i \neq k)}}^{+\infty} |\psi_{ik}(\rho)|$$

converge uniformément dans le domaine D.

A cet effet, écrivons les polynomes $\varphi_j(\rho + i - j)$ où $j \neq 0$, sous la forme

$$H_2(j)(\rho + i)^{n-2} + H_3(j)(\rho + i)^{n-3} + \ldots + H_n(j).$$

Chacune des expressions $H_r(j)$ est la somme d'un nombre fini de termes de la forme $j^q a_{mj}$ $(q = 0, 1, 2, \ldots)$. Nous avons supposé que les séries (3) sont convergentes dans un anneau comprenant la circonférence $|z| = 1$; donc, les séries

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |j^q a_{mj}| \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots)$$

et, par conséquent, les séries

$$S_r = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |H_r(k)| \qquad (r = 2, 3, \ldots n)$$

sont aussi convergentes. De plus, d'après l'hypothèse faite sur le domaine D, il existe une constante C_1, de sorte que

$$\frac{1}{|\varphi_0(\rho + i)|} < \frac{C_1}{(1 + |i|)^n}$$

et il existe une constante C_2 telle que $|\rho+i| > C_2(1+|i|)$. Par suite, on a

$$\sum_{\substack{i,k=-\infty\\ i\neq k}}^{+\infty} |\psi_{ik}(\rho)| = \sum_{\substack{i,k=-\infty\\ i\neq k}}^{+\infty} \left|\frac{\varphi_{i-k}(\rho+k)}{\varphi_0(\rho+i)}\right| = \sum_{\substack{i,j=-\infty\\ j\neq 0}}^{+\infty} \left|\frac{\varphi_j(\rho+i-j)}{\varphi_0(\rho+i)}\right|$$

$$< (S_2+S_3+\ldots+S_n)C_3 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|i|)^2};$$

donc, la série (6) converge uniformément.

D'après ce qui précède, le déterminant infini $\Omega(\rho)$ qui correspond au système (5), appartient au type *normal*, il converge ainsi que ses mineurs pour toute valeur de ρ, sauf peut-être pour les racines des équations $\varphi_0(\rho+i)=0$; de plus, il converge uniformément dans chaque domaine D du type envisagé. Donc la fonction $\Omega(\rho)$ est holomorphe pour chaque point ρ, sauf pour les racines des équations $\varphi_0(\rho+i)=0$, où elle a le caractère d'une fonction rationnelle. Ce dernier fait revient à ce que la même valeur ρ peut satisfaire seulement à un nombre fini des équations $\varphi_0(\rho+i)=0$. Plus précisément, ρ est un pôle d'ordre m pour la fonction $\Omega(\rho)$ si parmi les racines de l'équation $\varphi_0(\rho)=0$ il y en a exactement m qui diffèrent de ρ par zéro ou par un nombre entier; bien entendu, on suppose qu'on a compté chaque racine autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité.

La fonction $\Omega(\rho)$ a la période 1 ; en effet, l'égalité

$$\psi_{ik}(\rho+1) = \psi_{i+1,k+1}(\rho)$$

nous apprend que, en remplaçant ρ par $\rho+1$, la valeur du déterminant ne sera pas changée. De plus, si l'on fait tendre ρ vers l'infini, de sorte que sa partie réelle reste finie, les fonctions $\psi_{ik}(\rho)$ $(i\neq k)$ tendent vers zéro ; donc $\Omega(\rho)\to 1$. Par conséquent, $\Omega(\rho)$ est une fonction rationnelle $R(\omega)$ de $\omega=e^{2i\pi\rho}$ et la fonction R est telle que $R(0)=(\infty)=1$. Les pôles de $R(\omega)$ ont nécessairement la forme $\omega_k=e^{2i\pi\rho_k}$, où ρ_k est racine de l'équation $\varphi_0(\rho)=0$; plus précisément, ω est un pôle d'ordre m s'il figure m fois parmi les nombres $e^{2i\pi\rho_k}$. Donc $R(\omega)$ peut être mise sous la forme $\frac{P(\omega)}{(\omega-\omega_1)\ldots(\omega-\omega_n)}$ où $P(\omega)$ est un polynome. Soient $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, ...

les racines de $P(\omega)$ et posons $P(\omega) = C(\omega - \omega'^{1})(\omega - \omega'^{2})\ldots$; alors la formule $R(x) = 1$ indique que $P(\omega)$ est aussi d'ordre n et que $C = 1$ et la formule $R(0) = 1$ donne

$$\omega'^{1}\omega'^{2}\ldots\omega'^{n} = \omega_1\omega_2\ldots\omega_n.$$

Il résulte de cette dernière relation que, en posant

$$\rho'^{k} = \frac{1}{2i\pi}\log\omega'^{k},$$

on peut choisir la détermination des logarithmes de sorte que $\rho'^{1} + \ldots + \rho'^{n} = \rho_1 + \ldots + \rho_n$. Par suite, $\Omega(\rho)$ peut être mise sous la forme

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(\rho - \rho'^{k})\pi}{\sin(\rho - \rho_k)\pi}.$$

106. Considérons maintenant le système qu'on déduit de (4) en multipliant chaque équation par la fonction correspondante

$$h_0(\rho) = 1, \qquad h_i(\rho) = \frac{1}{i^n}e^{\frac{\rho-\rho_1}{i}}e^{\frac{\rho-\rho_2}{i}}\ldots e^{\frac{\rho-\rho_n}{i}} \qquad (i \neq 0),$$

les ρ_k étant les racines de l'équation $\varphi_0(\rho) = 0$.

Les coefficients de ce nouveau système sont des fonctions entières de ρ et il en sera de même quant au déterminant $\Delta(\rho)$ du système. En fait, ce déterminant appartient au type *normal* et converge, ainsi que ses mineurs, pour toute valeur de ρ; de plus, $\Delta(\rho) = \Pi(\rho)\,\Omega(\rho)$ où

$$\Pi(\rho) = \prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(\rho - \rho_k)\pi}{\pi}.$$

Tout cela revient à ce que les éléments du déterminant $\Delta(\rho)$ sont $\chi_{ik}(\rho) = h_i(\rho)\,\varphi_0(\rho + i)\,\psi_{ik}(\rho)$ et que le produit infini formé des fonctions

$$\chi_{ii}(\rho) = h_i(\rho)\varphi_0(\rho + i) = \left(1 + \frac{\rho - \rho_1}{i}\right)e^{-\frac{\rho-\rho_1}{i}}\ldots\left(1 + \frac{\rho - \rho_n}{i}\right)e^{-\frac{\rho-\rho_n}{i}}$$

converge absolument vers $\Pi(\rho)$, la convergence étant uniforme pour tout domaine fini.

Donc la fonction $\Delta(\rho)$ peut être mise sous la forme

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(\rho - \rho^{k})\pi}{\pi}.$$

Remplaçons dans $\Delta(\rho)$ les éléments χ_{ik} de la ligne numérotée i par les quantités correspondantes z^k; lorsque $|z| = 1$, ces quantités sont bornées dans leur ensemble; donc le déterminant modifié $\Delta_i(\rho, z)$ converge absolument. Mais il y a plus; le déterminant modifié converge absolument pour toute valeur z_0 située au dedans de l'anneau $r < |z| < R$. Pour le voir, considérons d'abord le déterminant qui vient de $\Delta(\rho)$ en y remplaçant $\chi_{ik}(\rho)$ par $\chi_{ik}(\rho)\, z_0^{i-k}$, ou, ce qui revient au même, en remplaçant $\varphi_j(\rho)$ par $\varphi_j(\rho)\, z_0^j$. Ce déterminant appartient aussi au type normal, ce que l'on voit immédiatement en introduisant la nouvelle variable $z' = \frac{z}{z_0}$; pour l'équation différentielle qui résulte, le déterminant $\Delta(\rho)$ sera remplacé par le déterminant modifié; donc tous les raisonnements faits s'appliquent aussi à ce nouveau déterminant. Par suite, en remplaçant, dans ce déterminant, par z_0^i tous les éléments de la ligne numérotée i, le déterminant obtenu converge absolument. Or, il suit immédiatement de la définition des déterminants absolument convergents que la convergence absolue subsiste si l'on multiplie chaque élément par la quantité correspondante z_0^{k-i}; en procédant ainsi sur le déterminant dernièrement envisagé, on obtient le déterminant $\Delta_i(\rho, z_0)$ dont il s'agissait de prouver la convergence absolue.

107. Lorsque $\Delta(\rho) \neq 0$, le système (4) n'admet, outre la solution évidente (0), aucune solution (α_k) telle que les α_k soient bornés dans leur ensemble; par conséquent, le système (2) n'admet aucune solution de la forme $z^{\rho}\Sigma\alpha_k z^k$. Soit maintenant ρ' une des racines de $\Delta(\rho)$. Supposons qu'il existe un indice i de sorte que l'un au moins des mineurs $\binom{i}{k}$ de $\Delta(\rho')$ ne s'annule pas. Dans ce cas, les équations (4) admettent, à un facteur près, la solution unique $\alpha_k = \binom{i}{k}$. Or, d'après ce que nous venons de dire sur le déterminant $\Delta_i(\rho, z)$, la série $\sum \binom{i}{k} z^k = \Delta_i(\rho', z)$ converge pour toute valeur z telle

que $r < |z| < R$; donc *l'expression* $z^{\rho'} \Delta_i(\rho', z)$ *représente, pour* $\rho = \rho'$, *la solution cherchée* $u(z)$; *et cette solution est unique à un facteur près.*

Nous venons de supposer que, pour $\rho = \rho'$, il existe un mineur $\binom{i}{k} \neq 0$. Ce cas se présente toujours quand ρ' est racine *simple* de $\Delta(\rho)$. En fait, la formule $\frac{d\Delta}{d\rho} = \sum_{i,k} \frac{d\gamma_{ik}}{d\rho} \binom{i}{k}$ montre nettement que l'hypothèse $\binom{i}{k} = 0$ pour tous les i et k entraîne $\frac{d\Delta}{d\rho} = 0$; et si $\frac{d\Delta}{d\rho} = 0$, ρ n'est pas racine simple.

Quand les quantités $\rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(n)}$ sont toutes distinctes et ne diffèrent pas par des nombres entiers, toutes les racines de $\Delta(\rho)$ sont simples. Dans le cas contraire, il y a des racines multiples, et pour une telle racine, il peut arriver que tous les mineurs du premier ordre s'annulent. Soit ρ' une racine d'ordre m; en développant $\left[\frac{d^m\Delta}{d\rho^m}\right]_{\rho=\rho'}$ suivant les mineurs d'ordre m, on voit sur-le-champ que l'un au moins de ces mineurs ne s'annule pas. Par suite, le système (4) admet, pour $\rho = \rho'$, un certain nombre $\leq m$ de solutions indépendantes, fournies par les mineurs de $\Delta(\rho')$; et l'on se rend aisément compte de ce que chacune de ces solutions donne lieu à une solution de l'équation différentielle.

M. von Koch a encore approfondi l'étude du déterminant $\Delta(\rho)$ en se servant d'une méthode qui consiste à appliquer aux déterminants infinis les principes de la théorie des diviseurs élémentaires; il est ainsi parvenu à calculer et à étudier par une voie nouvelle les systèmes fondamentaux formés par n intégrales indépendantes de l'équation différentielle. Je n'insiste pas sur les détails de ce calcul; le lecteur qui s'y intéresse consultera avec grand profit le Mémoire original (¹).

LES ÉQUATIONS INTÉGRALES.

108. Le lecteur connaît sans doute l'importance particulière qu'on attache depuis quelque temps à la théorie des équations

(¹) H. VON KOCH, *Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires* (*Acta mathematica*, t. XXIII, 1894, p. 337-419).

intégrales. Les principes fondamentaux de cette jeune théorie se trouvent déjà exposés dans d'excellents Traités et je pourrai me borner aux questions liées de plus près au sujet qui nous occupe.

Dans son cinquième Mémoire sur la théorie des équations intégrales linéaires, paru en 1906, M. Hilbert a ramené la résolution de ces équations fonctionnelles à celle des systèmes infinis d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Le quatrième Mémoire, paru peu avant et dont nous avons rendu compte, avait pour but principal de préparer cette application. Dès lors, on a traduit la plupart des résultats qui font le sujet du présent Volume, en d'autres portant sur les équations intégrales [1].

Les relations entre les deux théories ne se limitent pas à une analogie formelle, mais on peut établir entre leurs objets une correspondance réelle. L'idée de cette correspondance revient en germe à appliquer la méthode des coefficients indéterminés à des séries procédant suivant des *fonctions orthogonales*. Soit à considérer, par exemple, l'équation intégrale de seconde espèce

$$\varphi(s) - \int_a^b \mathrm{H}(s, t)\,\varphi(t)\,dt = f(s), \tag{7}$$

et supposons que l'on y puisse satisfaire par une fonction $\varphi(s)$ de la forme

$$\varphi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\,\alpha_k(s),$$

où les fonctions $\alpha_k(s)$ constituent un système orthogonal et normé sur l'intervalle (a, b). Remplaçons dans l'équation $\varphi(s)$ par son développement, multiplions successivement par les $\alpha_i(s)$ et intégrons par rapport à s ; l'équation intégrale sera traduite dans le système

$$\varphi_i - \sum_{k=1}^{\infty} h_{ik}\,\varphi_k = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

---

[1] Outre le cinquième Mémoire de M. Hilbert, *cf.* Weyl, *Singulare Integralgleichungen* (*Mathematische Annalen*, t. LXVI, 1908, p. 273-324). — Plancherel, *Note sur les équations intégrales singulières* (*Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali*, Pavia, 1909, p. 37-53). — Pell, *Biorthogonal systems of functions* (*Transactions of the American Math. Soc.*, t. XIX, 1911, p. 135-164).

aux inconnues φ_k, où

$$h_{ik} = \int_a^b ds \int_a^b H(s, t)\, \alpha_i(s)\, \alpha_k(t)\, dt, \qquad f_i = \int_a^b f(s)\, \alpha_i(s)\, ds.$$

Pour rendre exact ce raisonnement, il faudra tout d'abord préciser les hypothèses que l'on fait sur les fonctions qui entrent dans le calcul et puis montrer que, sous ces hypothèses, il est permis de passer de l'équation (7) au système (8). Supposons de plus que l'on ait choisi les hypothèses de sorte que le système (8) puisse être traité par l'une ou l'autre des méthodes que nous avons exposées et qu'il admette une solution (φ_k). Voici que se présente encore une nouvelle difficulté. Il ne suffit pas de passer de l'équation (7) au système (8); il faut aussi savoir retourner. C'est-à-dire, ayant déterminé les quantités φ_k, il faut savoir en construire la fonction $\varphi(s)$. Or, en général, la série $\Sigma\varphi_k\alpha_k(s)$ ne convergera pas; elle sera seulement, pour ainsi dire, un développement formel de la fonction cherchée.

Toutes ces questions appartiennent à la théorie de l'intégration, et l'on connaît, suivant les cas, différents moyens pour s'en emparer. Dans bien des cas particuliers, la théorie classique de l'intégration, qui remonte à Cauchy, fournit déjà les moyens nécessaires; mais en se limitant toujours à cette théorie classique, on rencontrerait des complications inattendues, même dans des cas simples en apparence. Nous préférons nous appuyer dès le commencement sur la notion d'intégrale créée par M. Lebesgue.

109. Considérons un système de fonctions réelles $\alpha_1(s)$, $\alpha_2(s)$, ..., définies dans l'intervalle (a, b), normées et orthogonales deux à deux. Soit de plus $f(s)$ une fonction réelle définie dans le même intervalle, intégrable et de carré intégrable. Nous appellerons *coordonnées* de $f(s)$ relativement au système $[\alpha_k(s)]$ les quantités f_k fournies par les intégrales

$$f_k = \int_a^b f(s)\, \alpha_k(s)\, ds.$$

L'identité bien connue de Bessel

$$\int_a^b \left[f(s) - \sum_{k=1}^{n} f_k \,\alpha_k(s) \right]^2 ds = \int_a^b [f(s)]^2 \, ds - \sum_{k=1}^{n} f_k^2$$

donne l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \int_a^b [f(s)]^2 \, ds.$$

Donc, la série Σf_k^2 converge. On peut se demander si la réciproque est aussi vraie ; c'est-à-dire, étant donnée une suite de nombres f_k tels que Σf_k^2 converge, existe-t-il une fonction $f(s)$ admettant comme coordonnées les nombres f_k ?

Pour que la réponse soit affirmative, il est indispensable de donner au mot *intégrale* le sens que lui attribue M. Lebesgue. Cela étant, j'ai démontré qu'il existe, en effet, des fonctions $f(s)$ sommables (intégrables au sens de Lebesgue) et de carrés sommables, ayant pour coordonnées les nombres f_k (1). On obtient une telle fonction en considérant la série uniformément convergente

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \int_a^s \alpha_k(s) \, ds;$$

la fonction $F(s)$ admet une dérivée, sauf peut-être pour certaines valeurs de s qui forment un ensemble de mesure nulle, et la fonction $f(s)$ égale à cette dérivée en chaque point où elle existe et prenant des valeurs quelconques dans les autres points, est sommable et de carré sommable et admet les f_k comme coordonnées. De plus, on a pour cette fonction $f(s)$

$$(9) \qquad \int_a^b [f(s)]^2 \, ds = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2.$$

(1) F. Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions* (*Comptes rendus*, 18 mars 1907). Le même fait fut découvert indépendamment par M. E. Fischer : *Sur la convergence en moyenne* (*Comptes rendus*, 13 mai 1907). Pour la démonstration détaillée et pour d'autres indications bibliographiques *voir* mon Mémoire : *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen* (*Mathematische Annalen*, t. LXIX, 1910, p. 449-497), ou encore l'exposé récent de M. et Mme Young : *On the theorem of Riesz-Fischer* (*Quarterly Journal of Mathematics*, t. XLIV, 1912, p. 49-88).

Rappelons de plus que si le système des fonctions $[\alpha_k(s)]$ est complet, la formule (9) porte sur toute fonction réelle $f(s)$ sommable et de carré sommable, admettant les f_k comme coordonnées (nº 102). En particulier, si $f_1(s)$ et $f_2(s)$ ont les mêmes coordonnées, la fonction $f_1(s) - f_2(s)$ a toutes ses coordonnées égales à zéro et l'intégrale de $[f_1(s) - f_2(s)]^2$ s'annule. Par suite $f_1(s) = f_2(s)$, sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle. Eu égard au rôle que jouent ces ensembles dans la théorie de M. Lebesgue, on peut donc dire tout simplement que la fonction $f(s)$ est uniquement déterminée par ses coordonnées.

Rappelons enfin la formule

$$(10) \qquad \int_a^b f(s)\,g(s)\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k,$$

que l'on obtient en appliquant (9) aux fonctions $\frac{1}{2}[f(s)+g(s)]$ et $\frac{1}{2}[f(s)-g(s)]$ et en retranchant le second développement du premier.

Ces résultats s'étendent immédiatement au cas où les fonctions $f(s)$, $g(s)$ et les coordonnées f_k, g_k ne sont plus supposées réelles; on aura seulement à remplacer les carrés par les carrés des valeurs absolues. Il n'est même pas essentiel de supposer réelles les fonctions $\alpha_k(s)$; on n'aura qu'à modifier légèrement les définitions et les énoncés.

Enfin, tous les résultats s'étendent aux fonctions de plusieurs variables. En particulier, si $[\alpha_k(s)]$ est un système orthogonal, normé et complet de fonctions réelles pour l'intervalle (a, b), le système $[\alpha_i(s)\alpha_k(t)]$ le sera également pour le carré $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ et l'on aura

$$(11) \quad \int_a^b \int_a^b f(s,t)\,g(s,t)\,ds\,dt = \sum_{i,k=1}^{\infty} \int_a^b \int_a^b f(s,t)\,\alpha_i(s)\,\alpha_k(t)\,ds\,dt \int_a^b \int_a^b g(s,t)\,\alpha_i(s)\,\alpha_k(t)\,ds\,dt,$$

où les fonctions $f(s,t)$ et $g(s,t)$ sont supposées sommables ainsi que leurs carrés.

110. Considérons l'équation intégrale (7). Pour commencer par

un cas simple, faisons l'hypothèse que les fonctions $H(s, t)$, $f(s)$ soient continues. En nous servant d'un système orthogonal, normé et complet de fonctions réelles $\alpha_k(s)$, le passage de l'équation intégrale (7) au système (8) se fera en remplaçant, dans l'égalité (10), $g(s)$ par $\alpha_i(s)$ et dans (11), $f(s, t)$ par $H(s, t)$, $g(s, t)$ par $\alpha_i(s)\varphi(t)$. Comme la série

$$(12)\qquad \sum_{i,k=1}^{\infty} |h_{ik}|^2 = \int_a^b \int_a^b |H(s, t)|^2\, ds\, dt$$

est convergente, la substitution définie par le tableau (h_{ik}) sera complètement continue et l'on pourra appliquer au système (8) et au système homogène qui y correspond tous les résultats concernant cette classe particulière de substitutions linéaires. On pourra aussi considérer, en même temps, l'équation du type transposé

$$(13)\qquad \psi(t) - \int_a^b H(s, t)\psi(s)\, ds = g(t)$$

qui se traduira également, moyennant le système orthogonal $[\alpha_k(s)]$, en un système

$$(14)\qquad \psi_k - \sum_{i=1}^{\infty} h_{ik}\psi_i = g_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

aux inconnues ψ_k. A toute solution (φ_k) du système (8) pour laquelle $\Sigma|\varphi_k|^2$ converge, correspond une fonction $\varphi(s)$ sommable ainsi que $|\varphi(s)|^2$; il en sera de même pour toute solution admise (ψ_k) du système (15). La fonction $\varphi(s) - \int_a^b H(s, t)\varphi(t)\, dt$, admettant comme coordonnées les quantités $\varphi_i - \sum_{k=1}^{\infty} h_{ik}\varphi_k = f_i$, sera égale à $f(s)$, sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle. Mais $\varphi(s)$ n'est déterminée par les φ_k qu'à une fonction additive près, qui a pour intégrale zéro. Or, on peut profiter de cette indétermination pour obtenir une solution exacte de l'équation (7); la correction nécessaire sera faite par l'équation elle-même. En effet, la fonction $\varphi^*(s) = f(s) + \int_a^b H(s, t)\varphi(t)$ est continue, elle admet les mêmes coordonnées que $\varphi(s)$ et, par suite, elle satisfait complètement à l'équation (7).

Le même raisonnement porte sur l'équation (13).

Je pense que ces indications sommaires suffisent pour voir comment on peut traduire tous les résultats concernant les substitutions complètement continues et les systèmes d'équations qui y correspondent, en d'autres qui portent sur les équations intégrales. Il est aussi facile de voir que l'hypothèse de la continuité de $H(s, t)$ n'est pas essentielle. En fait, la plus grande partie du raisonnement qui précède reste inaltérée, quand on suppose seulement que les fonctions $H(s, t)$, $|H(s, t)|^2$, $f(s)$, $|f(s)|^2$, $g(s)$, $|g(s)|^2$ sont sommables. Même si l'on veut être sûr que, par exemple, la solution $\varphi^\star(s)$ sera continue, il suffit, au lieu de supposer continue la fonction noyau $H(s, t)$, de la choisir de sorte que la première des intégrales

$$\int_a^t H(s, t)\,dt, \qquad \int_a^b |H(s, t)|^2\,dt$$

représente, pour toute valeur de t, une fonction continue de s, et que la seconde donne une fonction bornée. Tels sont, par exemple, les noyaux $|s - t|^{-\alpha}$, où $\alpha < \frac{1}{2}$.

Observons enfin que la convergence de la série (12) permet aussi d'appliquer aux systèmes (8) et (14) la méthode des déterminants infinis; on pourra même retrouver, de cette sorte, par un calcul facile, toutes les formules obtenues par M. Fredholm [1].

111. Pour nous rapprocher des équations dont les noyaux présentent des singularités plus élevées, nous allons introduire la notion de transformation fonctionnelle linéaire. Faisons correspondre à chaque fonction $f(s)$ du type considéré, c'est-à-dire sommable ainsi que $|f|^2$, une fonction $f'(s)$ appartenant au même type, et cela de sorte que

$$f'_1 + f'_2 = (f_1 + f_2)', \qquad cf' = (cf)'$$

et que, de plus, il existe une constante M^2 telle qu'on ait, pour

---

[1] *Cf.* MARTY, *Transformation d'un déterminant infini en un déterminant de Fredholm* (*Bull. des Sciences math.*, t. XXXIII, 1909, p. 296-300). — MOLLERUP, *Sur l'identité du déterminant de Fredholm et d'un déterminant infini de v. Koch* (même *Bulletin*, t. XXXVI, 1912, p. 130-136). — M. Marty fait l'hypothèse que $\sum_{i,k} |h_{ik}|$ converge. M. Mollerup adopte celle du texte.

toute fonction $f(s)$,

$$\int_a^b |f'(s)|^2 ds \leq M^2 \int_a^b |f(s)|^2 ds. \tag{15}$$

Nous appellerons *transformation linéaire* chaque correspondance de ce genre. Il est évident que, en faisant correspondre aux coordonnées de la fonction $f(s)$ celles de $f'(s)$, on aura défini une substitution linéaire de l'espace hilbertien. Inversement, si l'on fait correspondre à chaque fonction $f(s)$ du type considéré la fonction $f'(s)$ dont les coordonnées s'obtiennent en appliquant à celles de $f(s)$ une substitution linéaire A, on aura défini une transformation fonctionnelle linéaire.

Je ne tiens pas à suivre dans tous les détails cette relation entre les transformations et les substitutions linéaires. Il est manifeste que toute la théorie des substitutions linéaires que nous avons exposée dans le Chapitre IV peut être traduite en une théorie des transformations fonctionnelles linéaires.

En particulier, sous les conditions imposées antérieurement à la fonction $H(s, t)$, l'intégrale

$$f'(s) = \int_a^b H(s, t) f(t) dt \tag{16}$$

représente une transformation linéaire. De plus, les conditions imposées à $H(s, t)$ ne sont pas essentielles; en tout cas, il suffit de supposer que l'intégrale (16) existe et que l'hypothèse (15) soit remplie. Mais je me hâte d'observer que la formule (16) n'épuise pas les cas possibles; en fait, la transformation identique $f'(s) = f(s)$ ou la transformation $f'(s) = g(s) f(s)$ [où $g(s)$ est une fonction sommable et bornée] ne peuvent pas être mises sous cette forme [1]. Cette observation donne lieu à une question dont nous allons parler au numéro suivant.

112. L'étude d'une substitution linéaire A fait intervenir

---

[1] Une étude détaillée de la représentation analytique des transformations fonctionnelles linéaires a été donnée par M. Plancherel dans le Mémoire : *Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies* (*Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, t. XXX, 1910, p. 289-335).

d'autres substitutions qui y sont liées; rappelons la transposée $\mathfrak{A}$, les substitutions itérées A^k, les réciproques A^{-1}, $(E - A)^{-1}$, les substitutions $A^{(k)}$ étudiées au n° 82 et, dans le cas où A est réelle et symétrique, toutes les substitutions $f(A)$. Supposons maintenant qu'on ait à considérer une transformation linéaire ayant la forme (16); à cette transformation correspond, moyennant un système orthogonal $[\alpha_k(s)]$, une substitution linéaire A; cette substitution A donne lieu aux autres substitutions que nous venons de rappeler; à chacune de ces substitutions correspond, moyennant le système orthogonal $[\alpha_k(s)]$, une transformation fonctionnelle linéaire, et pour chacune de ces transformations, on peut se demander s'il est possible de la mettre sous l'une des deux formes

$$\int_a^b G(s, t) f(t)\, dt, \qquad c f(s) + \int_a^b G(s, t) f(t)\, dt.$$

Pour les transformations qui correspondent à $\mathfrak{A}$ et aux A^k, la question revient immédiatement à celle de l'inversion de l'ordre de certaines intégrations successives; je n'y insiste pas. Quant à A^{-1}, on est amené au problème délicat des équations intégrales de première espèce, dont il est impossible de rendre compte en quelques lignes. Pour $(E - A)^{-1}$, la question implique un des problèmes fondamentaux de la théorie des équations intégrales de seconde espèce. En fait, on sait, depuis les recherches de M. Fredholm, que, dans les cas les plus simples, la solution de l'équation (7) peut être mise sous la forme

$$\varphi(s) = f(s) + \int_a^b G(s, t) f(t)\, dt,$$

où la fonction $G(s, t)$, appelée le *noyau résolvant*, est indépendante de la fonction donnée $f(s)$.

Or, on peut attacher ce fait à la relation

$$(E - A)^{-1} = E + (E - A)^{-1} A;$$

cette relation nous montre que, pour calculer la fonction $G(s, t)$, on n'aura qu'à appliquer à la fonction $H(s, t)$, considérée comme fonction de s, la transformation linéaire qui correspond à $(E - A)^{-1}$. Ce procédé dont la légitimité est manifeste lorsque, par exemple,

le noyau est continu, s'applique aussi dans des cas où le noyau présente des singularités élevées; tout revient évidemment à démontrer qu'il est permis d'intervertir l'ordre de certains passages à des limites.

Le même raisonnement porte sur toutes les substitutions $f(A)$ qui peuvent être mises sous la forme $cE + f_1(A)A$. Je ne peux pas entrer dans les détails sans pénétrer loin dans la théorie de l'intégration; tous mes lecteurs, familiarisés avec cette théorie, se construiront aisément les raisonnements nécessaires.

Enfin il convient d'observer que, non seulement les résultats, mais presque tous les raisonnements concernant les systèmes d'équations à une infinité d'inconnues ont leurs analogues dans la théorie des équations intégrales. On pourra profiter de cette analogie dans les cas où la considération des fonctions sommables et de carrés sommables ne sera pas conforme aux données du problème.

LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

113. Étant donnée une suite indéfinie dans les deux sens (α_k), nous y attachons un tableau (a_{ik}), en posant $a_{ik} = \alpha_{k-i}$. Ce tableau appartient évidemment à un type particulier que nous appellerons *le type laurentien*, à cause de la relation qu'il a avec les séries

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k z^k.$$

La théorie des substitutions et des formes laurentiennes qui correspondent à ces tableaux particuliers est due à M. Tœplitz [1].

Voici le problème qui conduit le plus immédiatement aux tableaux laurentiens. Si l'on se propose de développer en série de Laurent le rapport de deux fonctions données par leurs développements de Laurent, la méthode des coefficients indéterminés

---

[1] Tœplitz, *Zur Transformation der Scharen bilinearer Formen von unendlich vielen Veränderlichen* (*Nachr. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen*, 1907, p. 110-116); *Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen* (même Recueil, 1910, p. 489-506); *Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlich vielen Veränderlichen* (*Mathematische Annalen*, t. LXX, 1911, p. 351-376).

conduit évidemment à envisager un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, et l'ensemble des coefficients de ces équations est représenté par le tableau laurentien qui correspond à la série figurant dans le dénominateur. Nous avons rencontré un problème particulier de cette sorte au n° 13, où nous avons rendu compte d'une Note de M. Appell.

Nous préférons nous placer de suite à un point de vue plus général en rattachant l'étude des substitutions et formes laurentiennes à la théorie des systèmes de fonctions orthogonales. Rappelons que nous y avons déjà fait allusion au n° 103, où les coefficients de certaines formes quadratiques furent fournis par des coefficients de Fourier.

114. Envisageons les fonctions

$$\varphi_k(s) = e^{2\pi k s\sqrt{-1}} = \cos 2\pi k s + \sqrt{-1}\sin 2\pi k s,$$

où k varie indéfiniment dans les deux sens. On a évidemment

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi_k(s)\overline{\varphi_l(s)}\,ds = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi(k-l)s\sqrt{-1}}\,ds = \begin{matrix}1\\0\end{matrix},$$

suivant que $k \begin{matrix}=\\ \neq\end{matrix} l$. De plus, le système est complet pour l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, ce qui suit immédiatement de la propriété analogue du système $(\cos 2\pi k s, \sin 2\pi k s)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Donc les fonctions φ forment un système orthogonal, normé et complet pour l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (1). Les coordonnées f_k d'une fonction $f(s)$ par rapport au système envisagé sont

$$f_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(s)\overline{\varphi_k(s)}\,ds.$$

On se rend aisément compte de ce que tous les résultats concer-

(1) Au lieu du système $[\varphi_k(s)]$, nous aurions aussi pu choisir le système plus familier $(e^{ks\sqrt{-1}})$ défini sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$ ou $(0, 2\pi)$: ce choix aurait pourtant encombré les formules par des constantes numériques sans importance.

nant les systèmes orthogonaux formés de fonctions réelles (n°s 102, 109) s'appliquent, avec des modifications évidentes, au système $\varphi_k(s)$. En particulier, si f_k et g_k désignent les coordonnées des fonctions $f(s)$, $g(s)$ — sommables, ainsi que $|f(s)|^2$, $|g(s)|^2$ — l'intégrale du produit $f(s)\,g(s)$ est donnée par $\Sigma f_{-k} g_k$. De plus, la coordonnée numérotée k de la fonction $f(-s)\,\overline{\varphi_i(s)}$ étant évidemment égale à f_{i-k}, on a

$$(17) \qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(-s)\,g(s)\,\overline{\varphi_i(s)}\,ds = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{k-i}\,g_k.$$

Supposons maintenant que le tableau $(a_{ik} = \alpha_{k-i})$ donne lieu à une substitution linéaire (distributive et bornée) de l'espace hilbertien :

$$(18) \qquad x'_i = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{k-i}\,x_k \qquad (i = -\infty, \ldots, +\infty).$$

Dans ce cas, la série $\Sigma|\alpha_k|^2$ étant convergente, les α_k sont les coordonnées d'une fonction $\alpha(s)$ sommable ainsi que $|\alpha(s)|^2$. Soit, de plus, $x(s)$ la fonction du même type admettant comme coordonnées les quantités x_k. Envisageons la fonction $x'(s) = \alpha(-s)\,x(s)$; d'après (17), les coordonnées x'_k de cette fonction sont fournies par les formules (18). Donc le système orthogonal $[\varphi_k(s)]$ fait correspondre à la substitution $A = (\alpha_{k-i})$ la transformation fonctionnelle $x'(s) = \alpha(-s)\,x(s)$. De plus, comme les séries $\Sigma|x_k|^2$, $\Sigma|x'_i|^2$ représentent les intégrales de $|x(s)|^2$, $|x'(s)|^2$, on a

$$(19) \qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\alpha(-s)\,x(s)|^2\,ds \leq M_A^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |x(s)|^2\,ds.$$

Soit $\mathfrak{E}$ l'ensemble des valeurs s où $|\alpha(-s)| > M_A$ et posons $x(s) = 1$ pour cet ensemble et nul ailleurs. L'inégalité (19) donne

$$\int_{\mathfrak{E}} |\alpha(-s)|^2\,ds \leq M_A^2 \int_{\mathfrak{E}} ds;$$

et comme $|\alpha(-s)| > M_A$ dans $\mathfrak{E}$, il résulte que l'ensemble $\mathfrak{E}$ doit avoir une mesure nulle. Donc, on peut y modifier $\alpha(s)$ arbitraire-

ment sans altérer les coordonnées α_k : par conséquent, on peut supposer qu'on ait *partout* $|\alpha(s)| \leqq M_A$.

On montre, par un raisonnement analogue, que si l'hermitien

$$(20) \qquad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{k-i} x_k \right|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\alpha(-s) x(s)|^2 \, ds$$

reste $\geqq J^2$ pour $\Sigma |x_k|^2 = 1$, l'ensemble des valeurs s où $|\alpha(-s)| < J$, a la mesure nulle. Donc, on peut aussi supposer qu'on ait *partout* $|\alpha(s)| \geqq J$.

Inversement, étant donnée une fonction sommable et bornée $\alpha(s)$, ses coordonnées α_k donnent lieu à une substitution linéaire $A = (\alpha_{k-i})$. En effet, soit $|\alpha(s)| \leqq M$; si la fonction $x(s)$ est sommable ainsi que $|x(s)|^2$, les fonctions $x'(s) = \alpha(-s) x(s)$ et $|x'(s)|^2$ le sont également et

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |x'(s)|^2 \, ds \leqq M^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |x(s)|^2 \, ds.$$

Donc, la substitution A qui correspond à la transformation $x'(s) = \alpha(-s) x(s)$ est *bornée*, et $M_A \leqq M$.

Supposons maintenant que la substitution laurentienne A admette une réciproque A^{-1}. Dans ce cas, comme la valeur de l'hermitien (20) doit être $\geqq \frac{1}{M_{A^{-1}}^2}$ pour tout système (x_k) tel que $\Sigma |x_k|^2 = 1$, on peut supposer que $|\alpha(s)| \geqq \frac{1}{M_{A^{-1}}}$. Par suite, la fonction $\frac{1}{\alpha(s)}$ est bornée et sommable. En désignant par $\alpha_k^{(-1)}$ les coordonnées de cette fonction, les tableaux (α_{k-i}), $(\alpha_{k-i}^{(-1)})$ satisfont évidemment aux relations générales qui existent entre les coefficients de deux substitutions réciproques; par conséquent, *la réciproque* A^{-1} *sera donnée par la substitution laurentienne qui correspond à la fonction* $\frac{1}{\alpha(s)}$.

D'une façon plus générale, *la réciproque de la substitution* $\lambda E - A$, *lorsqu'elle existe, est fournie par les coordonnées de la fonction* $\frac{1}{\lambda - \alpha(s)}$, *et inversement, lorsque cette fonction est*

bornée (ou qu'elle peut être rendue bornée en négligeant certaines valeurs s qui forment un ensemble de mesure nulle), *la réciproque* $(\lambda E - A)^{-1}$ *existe.*

En particulier, *si la fonction* $\alpha(s)$ *est continue, l'ensemble des valeurs* λ *pour lesquelles la réciproque de* $\lambda E - A$ *n'existe pas, coïncide avec l'ensemble des valeurs que prend la fonction* $\alpha(s)$. Dans le cas où la série infinie dans les deux sens $\Sigma \alpha_k z^k$ converge dans un anneau circulaire renfermant le point $z = 1$, l'ensemble des valeurs singulières de λ est fourni par les valeurs que prend la série sur la circonférence $|z| = 1$; donc cet ensemble constitue une courbe *analytique* [1].

115. Supposons maintenant que la fonction $\alpha(s)$ soit *réelle*, ce qui revient évidemment à supposer que $\alpha_{-k} = \overline{\alpha}_k$ pour tous les k.

Envisageons l'hermitien

$$A(x, x) = \sum_{i,k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{k-i} x_i \overline{x_k} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \alpha(s) |x(s)|^2 \, ds. \tag{21}$$

Soit M la borne supérieure de la fonction $\alpha(s)$, prise au sens de Lebesgue, c'est-à-dire soit M le plus petit nombre tel que l'ensemble des valeurs s où $\alpha(s) > M$, soit de mesure nulle. On définira d'une façon analogue la borne inférieure m. En faisant varier l'hermitien (21) sous la condition

$$E(x, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |x(s)|^2 \, ds = 1, \tag{22}$$

l'ensemble de ses valeurs reste compris évidemment entre m et M. De plus, en désignant par ε une quantité positive arbitrairement petite, la mesure μ de l'ensemble où $\alpha(s) > M - \varepsilon$ diffère de zéro; donc on peut poser $x(s) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ pour cet ensemble et o ailleurs. Les coordonnées x_k de la fonction $x(s)$ ainsi choisie satisfont

---

(1) M. Tœplitz a donné une étude détaillée et très intéressante des tableaux particuliers qui correspondent à des séries effectives de Laurent; elle se trouve dans le dernier des travaux précités.

évidemment à la condition (22) et, d'après la formule (21),

$$A(x, x) > M - \varepsilon.$$

Un raisonnement analogue s'applique sur la borne inférieure m. Donc, *les bornes supérieure et inférieure de la fonction* $\alpha(s)$, *prises au sens de Lebesgue, sont aussi les bornes exactes de l'hermitien* $A(x, x)$.

En particulier, *pour que la fonction* $\alpha(s)$ *soit positive ou qu'elle puisse être rendue positive en négligeant un ensemble de mesure nulle, il faut et il suffit que l'hermitien* $A(x, x)$ *soit positif.*

116. Les résultats précédents s'appliquent immédiatement au problème de déterminer les deux bornes d'une fonction réelle $\alpha(2\pi s)$ donnée par son développement en série de Fourier. Soit

$$(23) \qquad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos 2\pi k s + b_k \sin 2\pi k s)$$

ce développement, dont les coefficients sont fournis par les formules bien connues

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\alpha(2\pi s)\cos k s\, ds, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\alpha(2\pi s)\sin k s\, ds.$$

Sans nous préoccuper de la question si la série de Fourier converge ou non, nous convenons de la considérer comme un *symbole* de la fonction qui y donne lieu. Les coefficients a_k et b_k y jouent le rôle de coordonnées ; on en déduit les coordonnées par rapport au système orthogonal $[\varphi_k(s)]$ en posant

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}a_0, \qquad \alpha_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k\sqrt{-1}), \qquad \alpha_{-k} = \bar{\alpha}_k = \frac{1}{2}(a_k - b_k\sqrt{-1}).$$

Pour déterminer les bornes de la fonction $\alpha(2\pi s)$, on aura donc à envisager l'hermitien (21) formé avec les quantités α_k que nous venons de définir.

Désignons par m_n et M_n les bornes de la réduite

$$(24) \qquad [A(x, x)]_n = \sum_{i,k=0}^{n}\alpha_{k-i}\, x_i \bar{x}_k.$$

où l'on fait varier les x_k sous la condition

$$\sum_{k=-n}^{n} |x_k|^2 = 1.$$

D'une façon plus générale, on peut envisager les réduites

$$[A(x, \bar{x})]_{l,n} = \sum_{i,k=l}^{n} \alpha_{k-i} x_i \bar{x}_k \qquad (l < n);$$

le tableau des coefficients ne dépendant que de la différence $n - l$, les bornes de ces réduites sont m_{n-l} et M_{n-l}.

Pour les bornes considérées, on a évidemment

$$m_n \geq m, \qquad m_n \geq m_{n+1}, \qquad M_n \leq M, \qquad M_n \leq M_{n+1}.$$

D'autre part, supposons que, pour un certain système (x_k), l'hermitien (21) atteigne à ε près sa borne supérieure M, et posons

$$x_k^{n} = \frac{x_k}{\left(\sum_{i=-n}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}},$$

pour $k = -n, -n+1, \ldots, n$ et $x_k^{n} = 0$ pour les autres indices k. La relation

$$\lim_{n \to \infty} [A(x^{(n)}, \bar{x}^{(n)})]_n = A(x, \bar{x})$$

fait voir que, pour n suffisamment grand, $[A(x^{(n)}, \bar{x}^{(n)})]_n$ devra surpasser la quantité $M - 2\varepsilon$. Par conséquent, les valeurs M_{n-l} tendent en croissant vers M pour $n - l \to \infty$. De même, $m_{n-l} \to m$, ou, ce qui revient au même, $m_n \to m$, $M_n \to M$.

D'après un théorème bien connu, les bornes m_n et M_n de l'hermitien (24) sont fournies respectivement par la plus grande et la plus petite des racines de l'équation déterminante

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 - x & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_{-1} & \alpha_0 - x & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{-n} & \alpha_{-n+1} & \alpha_{-n+2} & \ldots & \alpha_0 - x \end{vmatrix} = 0.$$

En résumé, *les bornes supérieure et inférieure, au sens de*

Lebesgue, de la fonction $\varphi(2\pi s)$ admettant le développement (23) *sont les limites, pour $n \to \infty$, de la plus grande et la plus petite des racines de l'équation*

$$\begin{vmatrix} a_0 - 2x & a_1 + b_1\sqrt{-1} & \dots & a_n + b_n\sqrt{-1} \\ a_1 - b_1\sqrt{-1} & a_0 - 2x & \dots & a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{-1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_n - b_n\sqrt{-1} & a_{n-1} - b_{n-1}\sqrt{-1} & \dots & a_0 - 2x \end{vmatrix} = 0.$$

117. Observons enfin que ces beaux résultats de M. Tœplitz peuvent être considérés comme faisant partie d'un groupe de théorèmes, dus à divers auteurs, liés plus ou moins aux tableaux laurentiens et rentrant tous dans l'ordre d'idées des travaux importants et bien connus de MM. Landau et Carathéodory, au sujet du célèbre théorème de M. Picard [1].

Nous indiquerons brièvement les faits principaux.

D'après le théorème de M. Picard, une fonction entière qui n'est pas constante, prend toute valeur finie donnée, sauf peut-être une seule valeur exceptionnelle. Ce théorème, découvert en 1879, fut approfondi en 1904 par M. Landau d'une façon inattendue. M. Landau démontrait que pour déterminer un cercle $|z| < R$, à l'intérieur duquel la série entière

$$a_0 + a_1 z + \dots \qquad (a_1 \neq 0),$$

supposée convergente, prend au moins une fois l'une des valeurs 0 ou 1, il suffit de connaître seulement les deux premiers coefficients a_0, a_1. L'année suivante, M. Carathéodory a donné la valeur précise du rayon R en fonction de a_0 et a_1; il y fut conduit en attachant ce problème et une grande classe de problèmes analogues au suivant : *On se donne les $n+1$ premiers termes de la série entière*

$$\frac{1}{2} + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots; \tag{25}$$

---

[1] *Cf.* les Communications de MM. Tœplitz, Carathéodory, Fejér et Fischer (*Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. XXXII, 1911, p. 191-256), de M. Herglotz (*Berichte d. K. Sachs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig*, t. LXIII, 1911, p. 501-511), et de MM. I. Schur et Frobenius (*Sitzungsberichte d. K. Preuss. Akad. d. Wiss.*, 1912, p. 4-31).

peut-on déterminer les autres termes de sorte que la série soit convergente à tout l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et que la partie réelle de la fonction qu'elle représente y soit partout positive? Voici la réponse de M. Carathéodory : *Pour que la série* (25) *puisse être complétée de la manière exigée, il faut et il suffit que le point*

$$y'_1 = c'_1, \quad y''_1 = -c''_1, \quad \ldots, \quad y'_n = c'_n, \quad y''_n = -c''_n$$
$$(c_k = c'_k + c''_k\sqrt{-1})$$

de l'espace réel à $2n$ *dimensions appartienne au plus petit domaine convexe qui contient la courbe fermée définie par les équations paramétriques*

$$y'_1 = \cos\theta, \quad y''_1 = \sin\theta, \quad \ldots, \quad y'_n = \cos n\theta, \quad y''_n = \sin n\theta.$$

Récemment, les recherches de M. Tœplitz dont nous venons de parler ont permis de répondre à la question de M. Carathéodory sous une forme purement algébrique. Posons $c_0 = 1, c_{-k} = \overline{c_k}$; cela posé, *pour que la série* (25) *puisse être continuée de la manière exigée, il faut et il suffit que l'hermitien*

$$(26) \qquad \sum_{i,k=0}^{n} c_{k-i} x_i \overline{x_k}$$

soit non négatif.

L'équivalence des deux conditions fut établie encore par MM. Carathéodory, E. Fischer, I. Schur et Frobenius dans leurs travaux précités.

Supposons maintenant qu'on se donne tous les coefficients de la série (25). Alors on pourra se demander si la série donnée représente, à l'intérieur du cercle $|z| < 1$, une fonction dont la partie réelle y reste positive.

Cette question fut posée et résolue indépendamment par M. Carathéodory et par l'auteur [1]. Voici la réponse : *Pour que la*

---

[1] CARATHEODORY, *Ueber den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen* (*Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, t. XXXII, 1911, p. 193-217). — F. RIESZ, *Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXVIII, 1911, p. 33-62).

série (25) soit convergente à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et que, de plus, la partie réelle de la fonction qu'elle représente y reste partout positive, il faut et il suffit que l'une ou l'autre des deux conditions équivalentes que nous venons d'énoncer soit satisfaite pour tout entier n.

En effet, si l'on pose $z = re^{2\pi s\sqrt{-1}}$, la partie réelle de la série (25) devient

$$(27) \qquad \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (c'_k r^k \cos 2k\pi s - c''_k r^k \sin 2k\pi s),$$

et nous exigeons que, pour $r < 1$, cette série converge et représente une fonction positive. Pour qu'il en soit ainsi, il faut, d'après le n° 115, que l'hermitien

$$\sum_{i,k=-\infty}^{+\infty} c_{k-i} r^{|k-i|} x_i \overline{x_k}$$

existe et soit positif pour tous les $r < 1$. Donc, en particulier, il faut que les réduites soient positives pour $r < 1$; par conséquent, en passant à la limite $r = 1$, les hermitiens (26) devront être non négatifs. D'autre part, supposons que, pour chaque valeur de l'entier n, l'hermitien (26) est non négatif. En posant $x_1 = 1$, $x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$, $x_n = -c_n$, l'hermitien (26) devient $1 - |c_n|^2$. Donc, on a $|c_n| \leqq 1$ et cela pour tous les n. Par suite, les séries (25) (27) et la série

$$(28) \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k r^{|k|}|^2 \leqq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{2|k|} = \frac{1+r^2}{1-r^2}$$

convergent pour tous les $r < 1$. De plus, comme la série (28) converge, on peut appliquer les résultats établis au n° 115; il s'ensuit que la fonction harmonique définie par la série (27) est $\geqq 0$ pour tous les $r < 1$. Enfin, on sait qu'une fonction harmonique ne peut atteindre son minimum à l'intérieur d'un domaine où elle existe; donc, la fonction (27) est *positive* pour tous les $r < 1$.

Bien d'autres questions de ce genre se trouvent encore traitées dans les travaux cités en tête du présent numéro, en particulier dans le Mémoire de MM. Carathéodory et Fejér.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

LES COMMENCEMENTS DE LA THÉORIE.

CHAPITRE II.

LES DÉTERMINANTS INFINIS.

CHAPITRE III.

ESSAI D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE.

CHAPITRE IV.

LA THÉORIE DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES A UNE INFINITÉ DE VARIABLES.

CHAPITRE V.

LA THÉORIE DES FORMES QUADRATIQUES A UNE INFINITÉ DE VARIABLES.

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

51330 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.